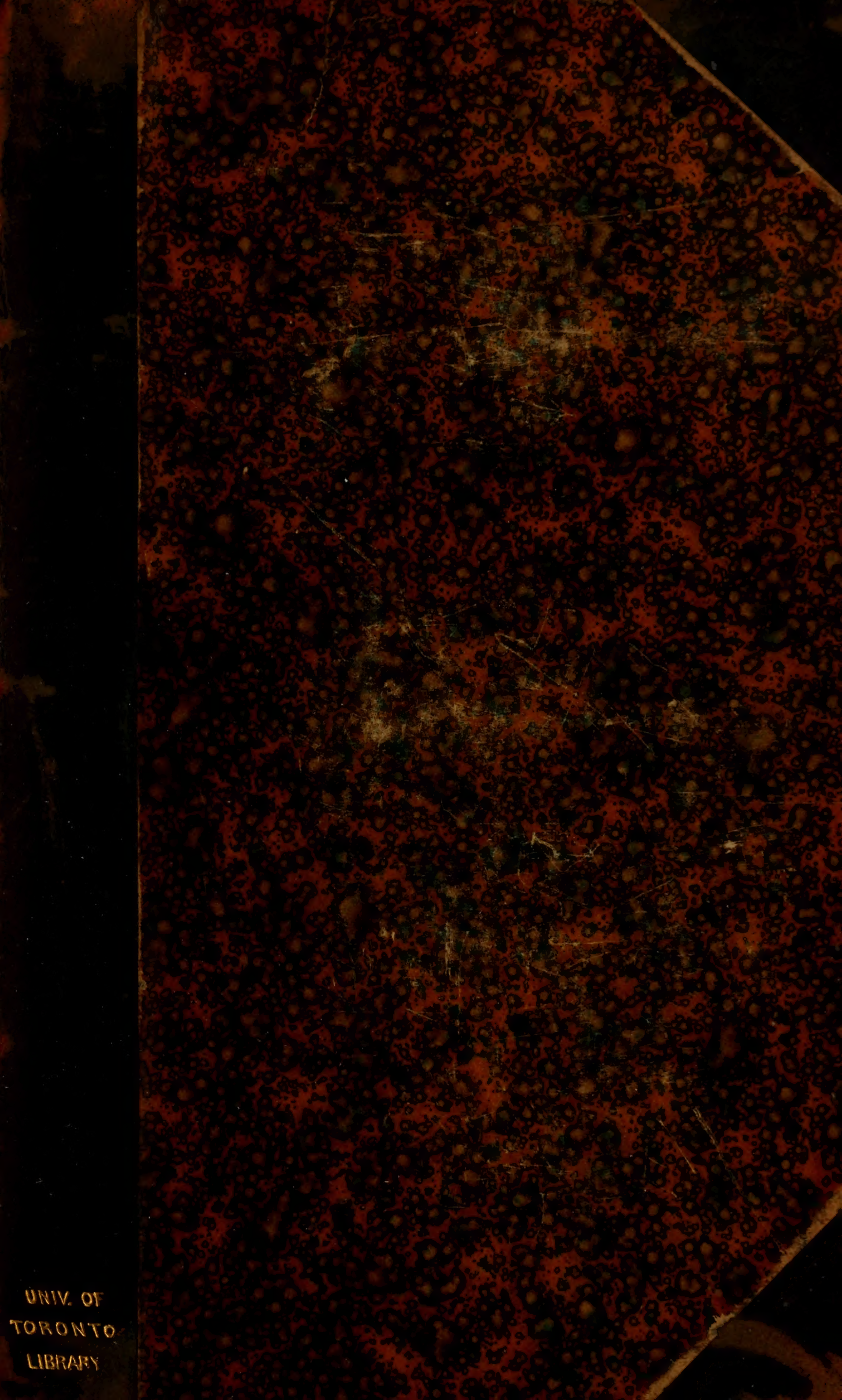

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1893.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

**Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem,
et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.**

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DOUZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE DONNÉ A L'AGRÉGATION EN 1892.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN A M. ROUCHÉ.

Je vais encore indiquer cette année, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, une solution du problème de Mécanique proposé au concours d'agrégation des Sciences mathématiques : on y arrive par une voie toute naturelle, sans artifice, et il est surprenant que la question ait arrêté nombre de candidats. J'en résume l'énoncé :

On considère un point M, qui se meut sur une surface polie S sous l'action d'une force P, toujours dirigée tangentiellement à S, dérivant d'un potentiel et dont la grandeur en chaque point dépend uniquement de la valeur u du potentiel en ce point; on suppose en outre que M puisse décrire une infinité de courbes d'égal potentiel pourvu qu'on lui imprime des vitesses initiales convenables. Cela posé, on demande :

1° De montrer que le ds^2 de la surface S peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{du^2}{F(u)} + \frac{dv^2}{\varphi(u)},$$

les lignes $v =$ const. étant des lignes géodésiques orthogonales aux lignes U d'égal potentiel.

2° En supposant les lignes U fermées, déterminer la forme des fonctions F et φ de telle sorte que M décrive toujours une trajectoire fermée quelles que soient les conditions initiales où on le place, au moins en se tenant entre des limites convenables; indiquer la grandeur de la force correspondante P.

3° Au nombre des surfaces satisfaisant aux conditions précédentes, se trouve la surface de révolution S_1 sur laquelle on a

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{m^8\,du^2}{4u(m^2+u)^4} + \frac{m^4 u\,dv^2}{(m^2+u)^2},$$

m désignant une longueur donnée, v l'azimut de l'élément ds : indiquer la forme de la méridienne; déterminer le mouvement de M sous l'action de la force P définie précédemment, en supposant qu'à l'instant initial le mobile soit sur le parallèle correspondant à $u = 2m^2$ avec une vitesse tangente à ce parallèle. Pression exercée sur S_1.

Nous allons traiter successivement les diverses parties de cet énoncé.

1. Prenons pour lignes coordonnées sur S les lignes U et leurs trajectoires orthogonales V déterminées chacune par un paramètre w; ds^2 sera de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dw^2.$$

Voyons d'abord ce qui résulte, pour la forme des fonctions E, G, de l'existence d'un potentiel sur S (il n'y a pas lieu de s'occuper de ce qui se passe hors de la surface). Soient, en un point quelconque, P_1, P_2 les composantes de P suivant les tangentes aux lignes U, V qui se coupent en ce point : le travail correspondant à un déplacement élémentaire sera

$$P_1\sqrt{\mathrm{E}}\,du + P_2\sqrt{\mathrm{G}}\,dw;$$

il doit d'ailleurs se réduire à du ; donc P_2 est nul ; P est dirigée normalement à U du côté où u augmente ; sa grandeur, égale à P_1, vérifie l'équation

$$P\sqrt{E} = 1; \tag{3}$$

P étant, par hypothèse, fonction de u seul, il en est de même pour E.

Cherchons maintenant ce qui résulte de l'hypothèse que M peut décrire une quelconque des lignes U ; le mouvement le plus général de M est déterminé par les équations de Lagrange, lesquelles, en faisant la masse du mobile égale à l'unité et ayant égard à ce que E est indépendant de w, prennent la forme

$$E\frac{du'}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}w'^2 = 1,$$

$$G\frac{dw'}{dt} + \frac{\partial G}{\partial u}u'w' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w}w'^2 = 0.$$

Ces équations doivent être compatibles quand on fait u égal à une constante, c'est-à-dire u' égal à zéro ; on doit avoir à la fois

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}w'^2 = -1, \tag{4}$$

$$G\frac{dw'}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial w}w'^2 = 0. \tag{5}$$

L'équation (4) devant avoir lieu pendant tout le mouvement, nous égalerons à zéro sa dérivée prise par rapport à t en regardant u comme constant, w, w' comme fonctions de t ; si, entre l'équation ainsi obtenue et (5), on élimine w' et $\frac{dw'}{dt}$, il vient

$$0 = G\frac{\partial^2 G}{\partial u\,\partial w} - \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial w} = G^2\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right),$$

d'où une intégrale première de la forme [1]

$$(6) \qquad \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u} = f'(u);$$

une nouvelle intégration donne

$$\log G = f(u) + f_1(w), \qquad G = g(u) g_1(w).$$

Mais on peut substituer à w la variable v définie par l'équation

$$g_1(w)\,dw^2 = dv^2,$$

les lignes coordonnées V restant les mêmes; et, de ce qui précède, il résulte que, sur S, le ds^2 peut se mettre sous la forme proposée (1). Si l'on y introduit une variable u_1 telle que du_1^2 soit égal à $\frac{du^2}{F(u)}$, ds^2 prendra la forme $du_1^2 + \mu\,dv^2$, qui caractérise la propriété des lignes

---

(1) On trouverait directement l'équation (6) en éliminant w'^2 entre (5) et l'équation des forces vives d'après laquelle le carré de la vitesse sur U, Gw'^2, doit être simplement fonction de u; il en résulte que la condition (6) est nécessaire pour que M se meuve sur U; mais on peut douter qu'elle soit suffisante. Le remplacement d'une équation du mouvement par l'intégrale des forces vives peut faire croire à la possibilité de mouvements impossibles. Ainsi, le mouvement d'un point abandonné à lui-même est déterminé, en coordonnées polaires, par les équations

$$(\alpha) \qquad \frac{dr'}{dt} - r^2\theta' = 0,$$

$$(\beta) \qquad \frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0.$$

La seconde, (β), associée à l'intégrale des forces vives,

$$r'^2 + r^2\theta'^2 = h,$$

laisserait croire que le mouvement peut être circulaire et uniforme, r et θ' restant constants. On sait qu'il n'en est rien et l'on n'aurait pas été conduit à ce paradoxe si l'on avait considéré les équations (α) et (β).

$v=$ const. d'être géodésiques; on voit de plus que S est applicable sur une surface de révolution.

L'équation (5) ou son équivalente

$$v'^2 \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\varphi(u)} = -2$$

montre que, dans le mouvement considéré, v', ainsi que la vitesse, ont des valeurs constantes, déterminées en fonction de u; on connaît donc la vitesse initiale qu'il faut imprimer à M pour lui faire décrire une ligne U donnée; cette vitesse sera naturellement tangente à U. On peut remarquer que le coefficient de dv^2 dans ds^2 doit varier en sens inverse de u.

2. Envisageons d'abord une conséquence de l'hypothèse que les lignes U sont fermées. Sur l'une quelconque U_1 d'entre elles, où $u=u_1$, ds se réduit à $\frac{dv}{\sqrt{\varphi(u_1)}}$; la coordonnée v, qui détermine les lignes V, est égale au produit d'une constante k par l'arc s_1 compté sur U_1 entre un point fixe et le point d'intersection de U_1 avec chacune des lignes V; la ligne fermée U_1 ayant une longueur l, si l'on augmente s_1 d'un multiple de l et v d'un multiple de kl, on retombe sur la même ligne V. On peut dire que la position d'un point sur S est fonction de v; cette fonction a pour période kl, ou encore 2π, en prenant k égal à $\frac{2\pi}{l}$; ce choix simplifiera un peu les résultats suivants et il est permis à cause de l'indétermination de la fonction $\varphi(u)$.

D'autre part, cherchons le mouvement le plus général du point M sous l'action de la force P, égale, d'après l'équation (3), à $\sqrt{F(u)}$: il peut être déterminé par l'intégrale des forces vives

(7) $$\frac{u'^2}{F(u)} + \frac{v'^2}{\varphi(u)} = 2u + h.$$

et par celle des équations de Lagrange où entre le terme de la forme $\frac{\partial T}{\partial v'}$, soit

$$\frac{d}{dt}\frac{v'}{\varphi(u)} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \frac{v'}{\varphi(u)} = C.$$

Si, entre les équations (7) et (8), j'élimine dt qui entre implicitement dans u' et v', j'obtiens une équation différentielle de la trajectoire :

$$(9) \qquad \frac{\varphi^2(u)}{F(u)}\frac{du^2}{dv^2} = \frac{2u}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(u).$$

Pour que cette équation définisse une ligne fermée, u doit nécessairement rester compris entre deux limites, α, β et, quand il va de l'une à l'autre, la quantité constante ω dont v augmente doit être commensurable avec π. Or, tandis que, d'après l'équation (8), v' ne s'annule jamais, u' s'annule quand u passe par un maximum β ou un minimum α; alors $\frac{du}{dv}$ est aussi nul et l'on a

$$\frac{2\alpha}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(\alpha) = 0,$$

$$\frac{2\beta}{C^2} + \frac{h}{C^2} - \varphi(\beta) = 0.$$

Entre ces équations et (9) éliminons $\frac{1}{C^2}$ et $\frac{h}{C^2}$; en tirant dv de l'équation résultante et intégrant par rapport à u, de α jusqu'à β, on obtient

$$(10) \qquad \omega = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(u)}{\sqrt{F(u)}} \begin{vmatrix} u & 1 & \varphi(u) \\ \alpha & 1 & \varphi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varphi(\beta) \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\beta - \alpha}\, du.$$

Dans la quinzième des Notes [1] dont il a enrichi le *Cours de Mécanique* de Despeyrous, M. Darboux considère précisément l'intégrale (10) et cherche quelles doivent être les formes des fonctions F et φ pour que ω soit commensurable avec π, période de ν, quels que soient α, β, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales du mouvement ; je n'ai qu'à reproduire brièvement l'analyse de l'éminent géomètre.

Suivant une remarque faite par M. Bertrand dans une question analogue, pour être toujours commensurable avec π, ω doit être constant : sinon, il serait fonction, en général continue, de α, β et passerait par une infinité de valeurs incommensurables avec π quand α et β varieraient. Pour mieux voir les conséquences, changeons de variable sous le signe $\int$ en posant

$$\alpha = a - h, \qquad \beta = a + h, \qquad u = a + hx$$

et développons l'intégrale en série suivant les puissances croissantes de h. On a vu (n° 1) que la trajectoire peut coïncider avec une quelconque des lignes U ; dans ce cas,

---

(1) Cette Note figurait au programme spécial du Concours pour 1892. Plusieurs candidats ont pensé que, S étant applicable sur une surface de révolution Σ, on était ramené à la recherche des surfaces de révolution sur lesquelles un point, sollicité par une force convenable correspondant à P, décrit toujours une trajectoire fermée, c'est-à-dire au problème même que M. Darboux a résolu, et ils ont reproduit intégralement son remarquable Mémoire, ou du moins ses résultats principaux. Un peu d'attention eût montré que la substitution de Σ à S ne fait que compliquer notre problème, auquel se rapporte seulement une partie du Mémoire. Mais il y a plus : de ce que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre dans le sens ordinaire du mot, on ne peut pas conclure qu'à une courbe fermée sur l'une correspond une courbe fermée sur l'autre : ainsi un hélicoïde est applicable sur une infinité de surfaces de révolution dont les parallèles correspondent aux hélices tracées sur l'hélicoïde : or les parallèles sont des lignes fermées, les hélices ne le sont pas.

h est nul; on peut donc prendre h aussi petit que l'on veut et, quand il ne dépasse pas une certaine limite, la série est convergente. Son premier terme ω_0, indépendant de h, doit être égal à $\mu\pi$, μ étant commensurable, tandis que les coefficients des diverses puissances de h seront nuls, et cela quel que soit a. Le déterminant qui entre sous le signe $\int$ devient

$$D = h \begin{vmatrix} x & 1 & \varphi(a) + hx\varphi'(a) + \frac{h^2x^2}{2}\varphi''(a) + \ldots \\ -1 & 1 & \varphi(a) - h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) - \ldots \\ 1 & 1 & \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) + \ldots \end{vmatrix};$$

il se simplifie beaucoup si, des éléments de la troisième colonne, on retranche ceux de la première multipliés par $h\varphi'(a) + \frac{h^3}{6}\varphi'''(a)$ et ceux de la seconde multipliés par $\varphi(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) + \frac{h^4}{24}\varphi^{\text{IV}}(a)$, et l'on trouve immédiatement

$$D = h^3(1 - x^2)\varphi''(a) + \frac{h^4}{3}(x - x^3)\varphi'''(a) + \frac{h^5}{12}(1 - x^4)\varphi^{\text{IV}}(a) + \ldots .$$

Cela posé, il est aisé de voir que l'on a

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}\,\varphi(a)}{\sqrt{F(a)\varphi''(a)}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi\sqrt{2}\,\varphi(a)}{\sqrt{F(a)\varphi''(a)}};$$

pour que ce terme reste constant et égal à $\mu\pi$, on doit avoir

$$(11) \qquad F(a) = \frac{2\varphi^2(a)}{\mu^2\varphi''(a)}$$

et cette identité déterminera la fonction F quand on connaîtra la forme de φ. Pour cela, reprenons l'expres-

pression de ω, remplaçons-y D et $F(a+hx)$ par leurs valeurs et écrivons φ, φ', φ'', ... au lieu de $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$: nous trouverons successivement

$$\omega = \mu \int_{-1}^{1} \left(\frac{1 + hx\dfrac{\varphi'''}{\varphi''} + \dfrac{h^2x^2}{2}\dfrac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} + \ldots}{1 + \dfrac{hx}{3}\dfrac{\varphi'''}{\varphi''} + h^2\dfrac{1+x^2}{12}\dfrac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} + \ldots} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mu \int_{-1}^{1} \left[1 + \frac{hx}{3}\frac{\varphi'''}{\varphi''} + \frac{h^2}{24}\left(5x^2\frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - 4x^2\frac{\varphi'''^2}{\varphi''^3} \right) + \ldots \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \mu\pi \left[1 + \frac{h^2}{48}\left(3\frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''} - 4\frac{\varphi'''^2}{\varphi''^2} \right) + \ldots \right].$$

Nous devons, on l'a vu, annuler en particulier le coefficient de h^2 ; il en résulte, en désignant maintenant par u l'argument de la fonction φ et de ses dérivées,

$$3\frac{\varphi^{\text{IV}}(u)}{\varphi'''(u)} = 4\frac{\varphi'''(u)}{\varphi''(u)}, \qquad \overline{\varphi'''(u)}^3 = A\,\overline{\varphi''(u)}^4.$$

Pour achever la détermination de φ, il faut distinguer deux cas, selon que A est nul ou différent de zéro; dans le premier, $\varphi''(u)$ est une constante $2C$; intégrant, puis se reportant à l'identité (11), on a des résultats de la forme

$$(12)\quad \varphi(u) = Cu^2 + C'u + C'', \qquad F(u) = \frac{(Cu^2 + C'u + C'')^2}{\mu^2 C}.$$

Si, au contraire, A n'est pas nul, on peut écrire

$$[\varphi''(u)]^{-\frac{4}{3}}\varphi'''(u) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2C}},$$

d'où, en intégrant et résolvant par rapport à φ'',

$$\varphi''(u) = \frac{2C}{(u+k)^3};$$

intégrant de nouveau, puis invoquant l'identité (11), il

vient

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi(u) = \dfrac{C + C'(u+k) + C''(u+k)^2}{u+k}, \\[2ex] F(u) = \dfrac{[C + C'(u+k) + C''(u+k)^2]^2(u+k)}{\mu^2 C}. \end{cases}$$

Nous avons obtenu les formules (12) ou (13) en annulant le coefficient de h^2 dans le développement de ω, sans nous occuper des termes suivants, qui doivent aussi être nuls; elles expriment des conditions nécessaires pour que ω reste égal à $\mu\pi$, mais nous ne savons pas si elles sont suffisantes. Pour nous en assurer, calculons, à l'aide de l'équation (10), la valeur que prend ω quand on donne à F et φ les formes (12) ou (13) [1], les dernières, par exemple. Je change de variable en posant

$$u + k = u_1, \qquad \alpha + k = \alpha_1, \qquad \beta + k = \beta_1;$$

le déterminant qui figure sous le signe $\int$ devient

$$D = \begin{vmatrix} u_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'u_1 + C''u_1^2}{u_1} \\[2ex] \alpha_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'\alpha_1 + C''\alpha_1^2}{\alpha_1} \\[2ex] \beta_1 - k & 1 & \dfrac{C + C'\beta_1 + C''\beta_1^2}{\beta_1} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{C(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - u_1)(u_1 - \alpha_1)}{\alpha_1 \beta_1 u_1},$$

et l'on a, par une intégration bien facile,

$$\omega = \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{du_1 \sqrt{\alpha_1 \beta_1}}{u_1 \sqrt{(\beta_1 - u_1)(u_1 - \alpha_1)}} = \mu\pi.$$

---

[1] Pareil calcul ne se trouve pas dans le Mémoire de M. Darboux parce que les formules (12) ou (13) l'amènent à considérer les mouvements produits sur une sphère par des forces de forme connues auxquelles, suivant une remarque antérieure de M. Paul Serret, correspondent toujours des trajectoires fermées.

Avec les formules (12), la vérification se ferait par le même procédé, mais avec plus de facilité, et la question est résolue. Dans les deux cas, P, égal à $\sqrt{F(u)}$, est connu.

3. On reconnaît d'abord que les fonctions $F(u)$ et $\varphi(u)$ qui figurent dans l'expression (2) de ds^2 sont données par les formules (13) en y faisant

$$k = 0, \qquad C = 1, \qquad C' = \frac{2}{m^2}, \qquad C'' = \frac{1}{m^4}, \qquad \mu = \frac{1}{2}.$$

Sur S_1 les lignes U sont les parallèles, les lignes V les méridiennes. Pour étudier l'une de ces dernières, identifions l'expression (2) de ds^2 avec la forme

$$d\sigma^2 + r^2\, dv^2;$$

$d\sigma$ représente un élément d'arc de méridienne dont la distance à l'axe OZ de la surface est r. On a d'abord

$$r = \frac{m^2\sqrt{u}}{m^2+u}, \qquad dr = \frac{m^2(m^2-u)\,du}{2(m^2+u)^2\sqrt{u}};$$

puis, r et z pouvant être considérés comme des coordonnées rectangulaires dans le plan de la méridienne,

$$dz = \sqrt{d\sigma^2 - dr^2} = \frac{m^2\sqrt{2m^2-u}}{2(m^2+u)^2}\, du,$$

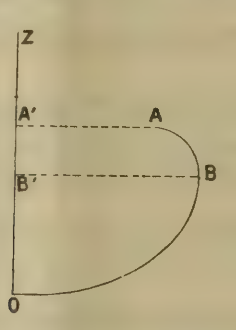
$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sqrt{2m^2u - u^2}}{m^2-u}.$$

La valeur de z en fonction de u s'obtient par une quadrature très simple :

$$z = \frac{m}{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{6} - \frac{m\sqrt{6m^2-3u}}{m^2+u} + \log\frac{m\sqrt{3}+\sqrt{2m^2-u}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{m^2+u}}\right].$$

Pour que r et dz soient réels, u doit rester compris entre zéro et $2m^2$; pour $u = 0$, r est nul et nous ferons

$z = 0$; la méridienne part de l'origine, normalement à OZ; u croissant jusqu'à $2m^2$, z va sans cesse en croissant jusqu'à $\frac{\sqrt{6} - \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} m$, environ $0,38m$; r croît jusqu'à la valeur $\frac{m}{2}$, pour $u = m^2$, auquel correspond le parallèle de rayon maximum BB', puis il décroît jusqu'à $\frac{m\sqrt{2}}{3}$, pour $u = 2m^2$ et l'on a un point d'arrêt A où la tangente est perpendiculaire sur OZ. En se plaçant au point de vue analytique, on pourrait faire revenir u de $2m^2$ à 0, dz changeant de signe; on aurait un arc symétrique de OA par rapport à AA'; mais, au



point de vue mécanique, on n'a à considérer que l'arc OA et la surface qu'il engendre (c'est seulement dans la région engendrée par BA que le point M pourrait décrire un parallèle).

La force P, toujours dirigée tangentiellement à la méridienne dans le sens OA, est égale à $\frac{2(m^2 + u)^2\sqrt{u}}{m^4}$. Le mouvement qu'elle imprime au point M peut être déterminé par les intégrales des forces vives et des aires, qui correspondent aux équations (7) et (8); mais, à l'instant initial, on a supposé $u = 2m^2$, $u' = 0$; nous ferons, pour le même instant, $v = 0$, $v' = \lambda$, λ étant donné; les constantes qui figurent dans les intégrales

(7) et (8) se déterminent immédiatement et nous écrirons celles-ci sous la forme

$$\frac{m^8}{4u(m^2+u)^4}\frac{du^2}{dt^2}+\frac{m^4 u}{(m^2+u)^2}\frac{dv^2}{dt^2}=2u-4m^2+\frac{2}{9}\lambda^2 m^2,$$

$$(14)\qquad \frac{m^2 u}{(m^2+u)^2}\frac{dv}{dt}=\frac{2}{9}\lambda.$$

L'équation de la trajectoire, obtenue en éliminant dt peut s'écrire

$$(15)\quad dv=\pm\frac{1}{2}\frac{du}{u^2\sqrt{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2m^2}\right)\left(\frac{2}{m^2}-\frac{81}{\lambda^2 m^2}-\frac{1}{u}\right)}};$$

à l'instant initial, le second facteur sous le radical est égal à $3\frac{\lambda^2-54}{2\lambda^2 m^2}$; s'il est négatif, u ne pourra décroître à partir de $2m^2$ sans rendre dv imaginaire; mais, sur S_1, u ne saurait surpasser $2m^2$; il lui restera donc nécessairement égal et nous serons dans le cas singulier d'un mouvement uniforme sur le parallèle limite. Si, au contraire, λ^2 est > 54, ou si la vitesse initiale est $> 2m\sqrt{3}$, u pourra varier entre $2m^2$ et la valeur α, toujours comprise entre $2m^2$ et $\frac{1}{2}m^2$, qui est définie par l'équation

$$(16)\qquad \frac{1}{\alpha}=\frac{2}{m^2}-\frac{81}{\lambda^2 m^2}.$$

Le second facteur sous le radical, dans l'équation (15), devient $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{u}$; d'ailleurs l'équation s'intègre au moyen d'un arc cosinus, et, en résolvant l'équation intégrale par rapport à $\frac{1}{u}$, on trouve

$$(17)\qquad \frac{1}{u}=\frac{\cos^2 v}{2m^2}+\frac{\sin^2 v}{\alpha};$$

cette équation définit une courbe comprise entre les pa-

rallèles correspondant à $u = 2m^2$ et à $u = \alpha$; le mobile va les toucher alternativement en des points dont les azimuts diffèrent de $\frac{\pi}{2}$: la trajectoire est bien une courbe fermée. La loi du mouvement est donnée par l'équation (14); on en déduit, eu égard à l'équation (17),

$$dt = \frac{9m^2}{2\lambda} \frac{\frac{1}{u}\,dv}{\left(1 + \frac{m^2}{u}\right)^2} = \frac{9\alpha}{\lambda} \frac{\alpha + 2m^2 \operatorname{tang}^2 v}{(3\alpha + 2m^2 \operatorname{tang}^2 v)^2} \frac{dv}{\cos^2 v},$$

$$\lambda t = \frac{\sqrt{3\alpha}}{m\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{m\sqrt{2} \operatorname{tang} v}{\sqrt{3\alpha}} - \frac{3\alpha \operatorname{tang} v}{3\alpha + 2m^2 \operatorname{tang}^2 v}.$$

Enfin la pression N est ici simplement égale au quotient du carré de la vitesse W par le rayon de courbure R de la section normale passant par la tangente MT à la trajectoire; la formule d'Euler donne R en fonction des rayons de courbure principaux R_1, R_2 et de l'angle θ que fait MT avec la méridienne en M. On a évidemment

$$N = \frac{W^2 \cos^2\theta}{R_1} + \frac{W^2 \sin^2\theta}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\sigma^2}{du^2} \frac{du^2}{dv^2} + \frac{1}{R_2} r^2\right) \frac{dv^2}{dt^2}.$$

$\frac{1}{R_1}$, courbure de la méridienne, est, en se reportant aux calculs relatifs à cette ligne,

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{d\frac{dr}{d\sigma}}{dz} = \frac{2(m^2 + u)^2}{m^4\sqrt{2m^2 - u}};$$

on a aussi

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \frac{dz}{d\sigma} = \frac{(m^2 + u)\sqrt{2m^2 - u}}{m^4}.$$

Les résultats précédents, combinés avec ceux qui se rapportent à la méridienne et avec les équations (14), (15), (16), donnent, après de simples réductions de

calculs,

$$N = \frac{4\lambda^2(m^2+\alpha)(m^2+u)^2\sqrt{2m^2-u}}{81 m^4 \alpha}.$$

CORRESPONDANCE.

Dans sa Note : *Sur la construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée*, M. d'Ocagne se propose de résoudre le problème suivant :

Construire une parabole connaissant un de ses points A, *le diamètre passant par* A *et le centre de courbure* Ω *répondant à ce point.*

La solution suivante me paraît plus simple que celle de M. d'Ocagne. Au point où le diamètre donné rencontre le cercle osculateur, menons la tangente A à ce cercle; soit (S) le cercle tangent au cercle osculateur au point A et ayant pour rayon 2 AΩ. Une sécante issue du point A rencontre le cercle (S), la droite t et la parabole considérée en trois points B, C, D tels que

$$(\mathrm{ABCD}) = -1 \text{ [1]}.$$

Le point D est donc déterminé.

On peut aussi ramener le problème proposé à la construction d'une parabole définie par deux tangentes et leurs points de contact. Un théorème dû à M. Ribaucour (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 172) montre que le pôle de la corde normale est situé sur la perpendiculaire abaissée sur le diamètre donné, par le symétrique du point Ω par rapport à A.

Menons par ce pôle P une droite rencontrant le dia-

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 369; 1888.

mètre et la normale en deux points R et R_1 tels que $PR = PR_1$; cette droite est la tangente à l'extrémité de la corde normale (Théorème I de la Note citée, p. 327).

SERVAIS.

UNE RÈGLE D'ANALOGIES DANS LE TRIANGLE ET LA SPÉCIFICATION DE CERTAINES ANALOGIES A UNE TRANSFORMATION DITE « TRANSFORMATION CONTINUE »;

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

On peut remarquer que beaucoup de propriétés du triangle vont par groupes de quatre; par exemple, à une propriété du cercle inscrit en correspond une autre de chaque cercle ex-inscrit, etc.; la recherche d'une loi qui relierait ces analogies m'a conduit à une transformation très féconde des formules, des théorèmes et des équations relatives au triangle, transformation dont je vais parler ici.

J'énoncerai d'abord un principe évident qui conduit très vite synthétiquement aux résultats que je veux exposer :

Toute formule entre les éléments du triangle peut être mise sous la forme $F(A, B, C) = 0$, A, B, C *étant les trois angles du triangle.*

En effet, tous les éléments du triangle peuvent s'exprimer en fonction des angles et d'un élément linéaire, lequel disparaît à cause de l'homogénéité.

L'identité $F(A, B, C) = 0$ aura évidemment lieu, quels que soient les angles A, B, C, pourvu que leur

somme soit π; donc, si je remplace, dans $F(A, B, C) = 0$,

$$A \text{ par } f_1(A, B, C), \quad B \text{ par } f_2(A, B, C), \quad C \text{ par } f_3(A, B, C),$$

f_1, f_2, f_3 remplissant la condition $f_1 + f_2 + f_3 = \pi$, j'aurai aussi

$$F(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

nouvelle forme de l'identité entre A, B, C, et cette forme *pourra* correspondre à une nouvelle forme de relations entre des éléments du triangle, éléments que l'on introduira, par exemple, soit dans f_1, f_2, f_3, soit dans

$$F(f_1, f_2, f_3) = 0.$$

Ce sera une transformation de formule et l'on voit d'ailleurs qu'il y a une infinité de transformations possibles; il est, de plus, évident qu'une formule *générale* quelconque du triangle contient en réalité implicitement toutes les autres formules imaginables relatives au triangle, puisque l'une quelconque d'elles dit simplement : *Voici une propriété que l'on a toujours lorsque l'on a un triangle* et que l'on a aussi, en même temps, toutes les autres propriétés inhérentes à l'état de triangle.

La plus féconde, je crois, de ces transformations est celle que l'on réalise en remplaçant dans

$$F(A, B, C) = 0,$$
$$A \text{ par } -A, \quad B \text{ par } \pi - B, \quad C \text{ par } \pi - C;$$

c'est même la seule que j'ai rencontrée qui présente un grand intérêt pratique; c'est d'elle dont je vais montrer l'utilité très générale dans la Géométrie du triangle ([1]); nous appellerons ce genre de transforma-

---

([1]) L'espace dont je puis disposer dans cet article m'oblige à renvoyer le lecteur pour plus de développements à divers Mémoires parus sur la question. (LEMOINE, *Comptes rendus de l'Association*

tion : *transformation continue* et nous donnerons, en terminant, le motif de cette dénomination.

Nous désignons par a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, R, S, r, r_a, r_b, r_c les côtés, les quantités

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c),\quad \tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad \tfrac{1}{2}(c+a-b),\quad \tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

le rayon du cercle circonscrit, la surface, les rayons des cercles tangents aux trois côtés du triangle et nous y ajoutons δ, δ_a, δ_b, δ_c pour représenter $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$.

Enfin le signe $\textcircled{E}$ signifiera : ce que devient E *par transformation continue.*

Cela posé, si nous supposons que a est l'élément linéaire qui disparait à cause de l'homogénéité pour donner

$$F(A, B, C) = 0,$$

élément que nous pouvons admettre invariable puisqu'il disparaît, les formules $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ donnent par *transformation continue en* A

$$\frac{a}{\sin(-A)} = \frac{\textcircled{b}}{\sin(\pi - B)} = \frac{\textcircled{c}}{\sin(\pi - C)} = \textcircled{2R}$$

ce qui montre que b, c, R deviennent $-b$, $-c$, $-R$, par *transformation continue en* A.

p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ deviennent évidemment $-(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$; la formule $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, montre que S devient : $-S$.

Les formules $S = pr = (p-a)r_a = \ldots$ montrent que r, r_a, r_b, r_c deviennent r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, etc.

---

française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Marseille 1891; MATHESIS, 1892, p. 58 et 81; POULAIN, *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1892; p. 110, 133, 151; LEMOINE, même recueil, 1892; p. 62, 91; etc.

Sans insister davantage, nous allons donner le Tableau *de la transformation continue en* A des principaux éléments du triangle et, si h_a, h_b, h_c et ω sont les hauteurs et l'angle de Brocard du triangle, nous pouvons dire :

Dans une formule on peut remplacer : a, b, c, p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, S, R, r, r_a, r_b, r_c, δ, δ_a, δ_b, δ_c, h_a, h_b, h_e, A, B, C, ω, etc., *par* a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$, $-$S, $-$R, r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, $-\delta_a$, $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, $-h_a$, h_b, h_c, $-$A, $\pi-$B, $\pi-$C, $-\omega$, etc., *et l'on aura une formule exacte.*

Il y a évidemment aussi *les transformations continues en* B *et en* C.

Les théorèmes se transformeront d'une façon analogue ; par exemple, s'il s'agit d'avoir, par *la transformation continue en* A, la transformation d'un théorème où entrent le cercle circonscrit de rayon r_b, la longueur p, etc., nous les remplacerons respectivement par r_c et par $(p-a)$, etc., en changeant le signe des segments y relatifs portés sur des droites s'il y a lieu.

Les équations se transformeront également de la façon suivante :

Supposons que les coordonnées normales absolues d'un point M soient : $\varphi_1(a,b,c)$, $\varphi_2(a,b,c)$, $\varphi_3(a,b,c)$, on aura

$$a\varphi_1+b\varphi_2+c\varphi_3=2\text{S}; \tag{1}$$

appelons φ_{1a}, φ_{2a}, φ_{3a} ce que deviennent φ_1, φ_2, φ_3 par *transformation continue en* A et appliquons la transformation continue en A à l'égalité (1), elle deviendra

$$a\varphi_{1a}-b\varphi_{2a}-c\varphi_{3a}=-2\text{S}$$

et l'on voit qu'il y a un point M_a dont les coordonnées

normales sont $-\varphi_{1a}$, φ_{2a}, φ_{3a}. M_a est le *transformé continu en* A de M [1].

On déduit de ce qui précède :

Si l'on a une équation en coordonnées *normales* $\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0$, sa *transformée continue en* A sera

$$\varphi(-x, y, z, a, -b, -c) = 0$$

et, si des calculs opérés sur diverses équations ont conduit à un certain théorème, les diverses équations de ce calcul *transformées en* A conduiront directement *à la transformation en* A de ce théorème. Il est clair qu'il n'est aucunement besoin de faire chaque fois cette vérification pour légitimer la transformation opérée immédiatement.

On verrait de même que : si, au lieu des coordonnées normales, on se sert des coordonnées normales barycentriques, un point M ayant pour coordonnées

$$\Psi_1(a, b, c), \quad \Psi_2(a, b, c), \quad \Psi_3(a, b, c)$$

donnera lieu à un *transformé continu en* A, M_a, dont les coordonnées seront

$$\Psi_1(a, -b, -c), \quad \Psi_2(a, -b, -c), \quad \Psi_3(a, -b, -c)$$

et l'équation

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) = 0$$

transformée donnera

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma, a, -b, -c) = 0.$$

En coordonnées cartésiennes (CB axe des x, CA axe

---

[1] Un point M marqué simplement sur le plan n'a pas de *transformé continu;* cela n'a aucun sens, il faut que l'on donne ses coordonnées en fonction des éléments du triangle; il n'y a donc pas de construction générale pour déduire M_a de M : la construction dépend exclusivement des fonctions de a, b, c qui définissent M.

des y), un point M : X, Y a pour *transformé continu en* A, M_a : X_a, $-Y_a$, en désignant par X_a, Y_a ce que deviennent les fonctions X, Y en y faisant la *transformation continue en* A.

Une équation $F(X, Y, a, b, c) = 0$ devient

$$F(X, -Y, a, -b, -c) = 0.$$

Voici les principales propriétés, faciles à démontrer, de la *transformation continue en* A; quelques-unes rentrent l'une dans l'autre.

1. La droite de l'infini a pour transformée la droite de l'infini.
2. Les ombilics du plan se transforment l'un dans l'autre.
3. Le degré d'une courbe se conserve ainsi que sa classe.
4. Un cercle et une parabole ont pour transformés un cercle et une parabole.
5. Les transformées des tangentes à une courbe sont les tangentes à la courbe transformée au point transformé du point de contact; d'où : les droites qui enveloppent une courbe se transforment en droites qui enveloppent la transformée de la courbe.
6. Si n droites concourent en V, leurs transformées concourent en V_a transformé de V.
7. Si n points sont sur une droite L, les transformés de ces points sont sur L_a transformée de L.
8. Si les longueurs de deux droites ou les valeurs des tangentes de deux angles sont dans un rapport indépendant des éléments du triangle de référence, ce rapport se conservera dans la transformation.
9. Les divisions harmoniques, l'homographie, l'homologie, l'involution, l'orthologie se conservent.
10. Des droites parallèles se transforment en des droites parallèles.
11. Deux droites perpendiculaires se transforment en deux droites perpendiculaires.
12. Les foyers ou les sommets d'une courbe se transforment en foyers ou en sommets de la transformée.
13. Les valeurs des rapports anharmoniques des divisions

transformées se déduisent par transformation continue des rapports anharmoniques des divisions données.

14. La polaire d'un point par rapport à une conique se transforme en la polaire du point transformé par rapport à la conique transformée.

15. La distance de deux points transformés, la distance d'un point transformé à une droite transformée se déduisent par transformation continue de la distance des deux points donnés ou de la distance du point donné à la droite donnée, etc.

Ce qui précède suppose que les éléments de la relation que l'on traite algébriquement, par transformation continue, sont déterminés sans ambiguïté possible, c'est-à-dire, par exemple, qu'ils ne contiennent point de radicaux, car ces radicaux ont implicitement un double signe; s'il y en a, il faut discuter le cas particulier qui se présente.

Ainsi l'on a

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

qui semble, à première vue, donner par *transformation continue en* A

$$\sin\left(-\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{-b\times-c}}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}};$$

mais, le radical comportant implicitement le double signe, la *transformation continue en* A correspond ici au signe — et l'on a effectivement

$$\sin\left(-\frac{A}{2}\right)=-\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}},$$

ce qui est exact, mais reproduit simplement la formule (voir *loc. cit.*, Poulain).

Eu égard *à la transformation continue*, les points

remarquables, droites, courbes, formules, théorèmes relatifs au triangle se divisent en quatre catégories :

1° *La transformation continue* faite en A, en B ou en C les reproduit sans modification.

Exemples : Le point de Lemoine, la formule

$$a = b \cos C + c \cos B, \qquad \ldots.$$

2° *La transformation continue* faite en A, en B ou en C donne des résultats différents entre eux et différents du premier.

Exemples : Les théorèmes relatifs au cercle inscrit donnent des théorèmes relatifs aux cercles ex-inscrits. La formule

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(b-c)^2 = p^2 - 3r\delta$$

transformée en A donne

$$\tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c+a)^2+(b+a)^2] = (p-a)^2+3r_a\delta_a,$$

transformée en B donne

$$\tfrac{1}{2}[(b+c)^2+(c-a)^2+(a+b)^2] = (p-b)^2+3r_b\delta_b,$$

transformée en C donne

$$\tfrac{1}{2}[(b+c)^2+(c+a)^2+(a-b)^2] = (p-c)^2+3r_c\delta_c.$$

3° *La transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C, reproduit une fois sans modification la formule ou le théorème; les deux autres donnent toutes deux un même résultat différent de la formule ou du théorème primitif.

Exemple : La formule

$$(b-c)r_b r_c = S(r_b - r_c)$$

se reproduit en A; mais, soit en B, soit en C, elle donne

$$(b+c)rr_a = S(r+r_a).$$

4° *La transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C donne un même résultat, mais différent de la formule ou du théorème que l'on transforme.

Exemple : L'équation

$$\Sigma\sqrt{x\sin(A+60)}=0,$$

transformée soit en A, soit en B, soit en C donne

$$\Sigma\sqrt{x\sin(A-60)}=0.$$

Ces deux équations représentent les coniques de Simmons.

Je n'ai pas trouvé de cas où *la transformation continue* donne des combinaisons autres de résultats, comme serait celle-ci, par exemple :

La formule donnée se reproduit par une des transformations et, par les deux autres, donne des résultats différents et différents entre eux.

La transformation continue conduit le plus souvent, et cela sans aucune recherche, à des théorèmes ou à des formules *analogues* à celles qui sont le but direct de la recherche que l'on fait; elle ne donne pas, d'ailleurs, toutes les analogies possibles, car il y en a qui peuvent dériver d'autres sources. Ainsi voici deux formules qui ont une analogie bien évidente

$$ar_a+br_b+cr_c=2p(2R-r),$$
$$-ar_a+br_b+cr_c=2p(2R-r_a),$$

et qui ne peuvent dériver l'une de l'autre par transformation continue; elles conduisent d'ailleurs chacune à trois formules par transformation continue en A, en B et en C; elles donnent en A

$$ar+br_c+cr_b=2(p-a)(2R+r_a),$$
$$-ar+br_c+cr_b=2(p-a)(2R+r),$$

en B, etc.

Quand un géomètre vient de trouver un théorème, il a un avantage évident à appliquer toujours *la transformation continue,* car il arrive fréquemment qu'il obtient ainsi de nouveaux théorèmes ou de nouvelles formules.

Nous allons prendre quelques exemples, choisis au hasard dans les publications récentes des journaux de Mathématiques qui s'occupent du triangle.

M. Furhmann a donné dans le journal *Mathesis,* 1890, p. 105, un très intéressant travail *Sur un cercle associé à un triangle,* où il énonce de nombreuses propriétés fort curieuses de ce nouveau cercle. *La transformation continue* montre immédiatement qu'il y a trois autres cercles qui jouissent de propriétés analogues et auxquels le Mémoire en entier peut être appliqué avec les modifications indiquées par *la transformation continue.*

Dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, M. Boutin donne un grand nombre de formules relatives au triangle; en y appliquant *la transformation continue,* on écrit immédiatement des formules que leur défaut de symétrie apparente rend quelquefois assez difficiles à démontrer autrement et rendrait surtout difficiles à prévoir. Voici sept de ces formules :

$$(1) \qquad a\cot\frac{A}{2}+b\cot\frac{B}{2}+c\cot\frac{C}{2}=2\delta,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$a\cot\frac{A}{2}+b\operatorname{tang}\frac{B}{2}+c\operatorname{tang}\frac{C}{2}=2\delta_a,$$

$$(2) \qquad r_a\operatorname{tang}\frac{A}{2}+r_b\operatorname{tang}\frac{B}{2}+r_c\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\delta^2-2p^2}{p},$$

et, *par transformation continue en* A,

$$r \operatorname{tang}\frac{A}{2} + r_c \cot\frac{B}{2} + r_b \cot\frac{C}{2} = \frac{\delta_a^2 - 2(p-a)^2}{p-a},$$

$$(3) \qquad \sum \frac{ab\cos^2\frac{A}{2} - ac\cos^2\frac{B}{2}}{r_a} = 0,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{ac\sin^2\frac{B}{2} - ab\sin^2\frac{C}{2}}{r} - \frac{ab\sin^2\frac{C}{2} + bc\cos^2\frac{A}{2}}{r_c} + \frac{bc\cos^2\frac{A}{2} + ac\sin^2\frac{B}{2}}{r_b} = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{C}{2}\right) \\ & = 4\cos\left(\frac{C-B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\cos\left(\frac{A-C}{4}\right) \end{aligned} \right.$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\begin{aligned} & 1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) - \cos\left(C + \frac{B}{2}\right) + \cos\left(A + \frac{C}{2}\right) \\ & = 4\cos\frac{B-C}{4}\cos\left(45^\circ + \frac{A-B}{4}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{A-C}{4}\right). \end{aligned}$$

$$(5) \quad 2\cot\omega = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - \left(\operatorname{tang}\frac{A}{2} + \operatorname{tang}\frac{B}{2} + \operatorname{tang}\frac{C}{2}\right)$$

et, *par transformation continue en* A,

$$2\cot\omega = \cot\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2} + \operatorname{tang}\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2},$$

$$(6) \quad \frac{\left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot C\right)} = 1,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{\left(1+\cot\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\cot\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot B\right)}=1,$$

$$(7)\qquad \frac{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot B\right)}=1,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1-\cot\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1-\cot\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1-\cot\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1-\cot\frac{C}{2}\cot B\right)}=1.$$

Donnons comme exemple quelques applications de *la transformation continue.*

La parabole inscrite dans un triangle et qui touche la droite

$$\sum \frac{a}{b-c}x=0$$

[c'est la tangente commune au cercle et à l'ellipse inscrite de Steiner (voir *Nouvelles Annales,* 1886, p. 126)] a pour équation

$$\Sigma\sqrt{ax(2a-b-c)}=0;$$

son foyer, situé sur le cercle circonscrit, a pour coordonnées

$$\frac{a}{2a-b-c},\quad \ldots.$$

On en conclut immédiatement *par transformation continue en* A que :

La parabole inscrite dans un triangle et qui touche la droite

$$\frac{ax}{b-c}+\frac{by}{c+a}-\frac{cz}{a+b}=0$$

(laquelle est la tangente commune au cercle ex-inscrit o_a et à l'ellipse de Steiner) a pour équation

$$\sqrt{-ax(2a+b+c)}+\sqrt{by(2b+a-c)}+\sqrt{cz(2c+a-b)}=0$$

et pour foyer le point dont les coordonnées sont

$$-\frac{a}{2a+b+c}, \quad \frac{b}{2b+a-c}, \quad \frac{c}{2c+a-b}.$$

Le cas où un côté égale la moitié de la somme des deux autres est intéressant à examiner. Nous ne nous y arrêterons point parce que cette discussion très simple ne se rattache pas directement à l'objet de notre Note.

Appliquons la transformation continue à l'étude de la proposition suivante énoncée par M. Boutin (*Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1891, p. 184) :

Soient O, o, o_a, o_b, o_c, A', B', C' *les centres du cercle* ABC, *des cercles tangents aux trois côtés et les pieds des hauteurs; les droites* A'o_a, B'o_b, C'o_c *concourant au point* M *dont les coordonnées sont*

$$\cos B + \cos C - \cos A, \quad \ldots.$$

Remarquons d'abord qu'à l'aide des formules que nous avons données à l'Association française, dans le journal *Mathesis*, etc., les coordonnées de M peuvent s'écrire plus simplement

$$R - r_a, \quad R - r_b, \quad R - r_c,$$

car on a

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}, \qquad \ldots,$$

et donnons quelques propriétés du point M.

Oo contient, comme l'on sait, le point J : $\frac{1}{p-a}, \ldots,$ si souvent rencontré dans la Géométrie du triangle. Il

est facile d'établir que l'on a

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}o} = \frac{\mathrm{R}+r}{2r}, \qquad \frac{\mathrm{JO}}{\mathrm{J}o} = \frac{2\mathrm{R}+r}{2r},$$

et si l'on appelle d la distance $\mathrm{O}o$, d_a la distance $\mathrm{O}o_a$ qui sont données par les formules

$$d^2 = \mathrm{R}(\mathrm{R}-2r), \qquad d_a^2 = \mathrm{R}(\mathrm{R}-2r_a),$$

on verrait aussi que

$$\mathrm{M}o = \frac{2rd}{\mathrm{R}-r}, \qquad \mathrm{J}o = \frac{2rd}{2\mathrm{R}-r}, \qquad \mathrm{JM} = \frac{2\mathrm{R}rd}{(\mathrm{R}-r)(2\mathrm{R}-r)}.$$

En appliquant *la transformation continue en* A, on a immédiatement les résultats suivants :

Les trois droites $o\mathrm{A}'$, $o_c\mathrm{B}'$, $o_b\mathrm{C}'$ *concourent en un même point* M_a *dont les coordonnées sont*

$$\mathrm{R}+r, \quad -\mathrm{R}+r_c, \quad \mathrm{R}+r_b.$$

M_a est sur $\mathrm{O}o_a$, droite qui contient le point J_a :

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p-c}, \quad \frac{1}{p-b};$$

on a

$$\frac{\mathrm{M}_a\mathrm{O}}{\mathrm{M}_a o_a} = \frac{-\mathrm{R}+r_a}{2r_a}, \qquad \frac{\mathrm{J}_a\mathrm{O}}{\mathrm{J}_a o_a} = \frac{-2\mathrm{R}+r_a}{2r_a},$$

$$\mathrm{M}_a o_a = \frac{2r_a d_a}{\mathrm{R}-r_a}, \quad \mathrm{J}_a o_a = \frac{2r_a d_a}{2\mathrm{R}-r_a}, \quad \mathrm{J}_a\mathrm{M}_a = \frac{2\mathrm{R}r_a d_a}{(\mathrm{R}+r_a)(2\mathrm{R}+r_a)}.$$

Nous avons fait, dans les divers Mémoires déjà cités, un très grand nombre d'applications de la méthode à des questions variées et à plus de trois cents formules, nouvelles pour la plupart ; nous ne nous arrêterons donc pas davantage sur le sujet.

Nous citerons encore seulement trois exemples de formules, non des plus remarquables, que nous pourrions choisir dans ce que nous avons publié, mais que nous

n'avons pas encore mentionnées,

$$\sum \frac{(b^2-c^2)^2}{a} = \frac{2p(\mathrm{R}-2r)}{\mathrm{R}}[p^2+r(2\mathrm{R}+r)],$$

$$p(2a-p) = r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c,$$

$$a^2 r_a + b^2 r_b - c^2 r_c = 4\mathrm{R}p[(p-c) - c\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}],$$

qui donnent respectivement par *transformation continue en* A

$$-\frac{(b^2-c^2)^2}{a} + \frac{(c^2-a^2)^2}{b} + \frac{(a^2-b^2)^2}{c}$$

$$= \frac{2(p-a)(\mathrm{R}+2r_a)}{\mathrm{R}}[(p-a)^2 - r_a(2\mathrm{R}-r_a)],$$

$$p^2 - a^2 = rr_b + rr_c + r_b r_c,$$

$$a^2 r - b^2 r_c + c^2 r_b = 4\mathrm{R}(p-a)[(p-b) - c\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}].$$

La transformation continue ne s'applique qu'au triangle général ; ainsi les formules du triangle rectangle ne peuvent être transformées, au moins sans certaines précautions (*voir* l'article de M. Poulain déjà cité). Par exemple, dans le triangle BAC rectangle en A, on a

$$c = b\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C};$$

la transformation continue, telle que nous l'avons définie, donnerait

$$c = -b\,\mathrm{tang}\,\mathrm{C},$$

ce qui est faux.

La transformation continue s'applique au tétraèdre ; nous n'indiquerons que la *transformation fondamentale* dont tout dérive et qui correspond au changement de a, b, c en a, $-b$, $-c$ dans le triangle.

Soit ABCD un tétraèdre ; désignons les arêtes opposées DA, BC par a' et a ; DB et AC par b' et b ; CD et AB par c' et c ; on peut dire que :

Si, dans une formule quelconque représentant une propriété générale du tétraèdre, on laisse a, b, c *et*

que l'on change a', b', c' en $-a'$, $-b'$, $-c'$, la nouvelle formule est encore exacte.

La transformation continue appliquée au tétraèdre est aussi générale, mais, *en fait,* jusqu'ici moins féconde qu'appliquée au triangle. Cela tient surtout à ce qu'il y a, dans le tétraèdre, peu de points remarquables ayant des propriétés simples et aussi que la Géométrie de détail du tétraèdre est actuellement aussi peu avancée que l'était celle du triangle il y a quelques années; la question est, du reste, beaucoup plus compliquée.

Nous allons terminer ce petit travail en justifiant l'appellation de *transformation continue* que nous avons adoptée.

Si l'on considère un triangle ABC, il est clair que, par définition, toute propriété *générale* du triangle s'applique à ABC; imaginons que CA soit mobile autour de C et faisons tourner CA autour de C dans un même sens qui l'éloigne de CB, la figure aura deux états : 1° A est au-dessus de BC; 2° A est au-dessous; elle ne peut passer de l'un à l'autre de ces états par le mouvement continu de CA, qu'après que CA est devenue parallèle à BA; or une propriété générale du premier état de la figure appartient évidemment au second état, mais il est facile de voir qu'elle s'énoncera *souvent* différemment en employant la terminologie habituelle rapportée au triangle ABC; ainsi, suivons par continuité ce que devient le cercle inscrit à ABC pris dans le premier état de la figure, on voit qu'il deviendra, dans le deuxième état, le cercle ex-inscrit o_a du triangle ABC; par conséquent, un théorème dans l'énoncé duquel entreront le cercle inscrit, son centre, son rayon, etc., donnera par continuité un énoncé d'une *forme* nouvelle où entreront le cercle ex-inscrit o_a, son centre, son rayon, etc. Le

changement est produit *par la transformation continue en* A.

Pour le tétraèdre ABCD on réalisera géométriquement la *transformation continue en* D en faisant tourner une des faces aboutissant en D, BCD par exemple, autour de sa base BC et l'on aura deux états de la figure : 1° D est au-dessus du plan ABC; 2° D est au-dessous; ces deux états étant séparés par la position où le plan BCD est parallèle à AD.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1895).

Analyse.

Fonctions d'une variable complexe : fonctions uniformes, fonctions non uniformes. — Dérivée. — Intégrales.

Intégrale d'une fonction uniforme le long d'un contour donné; pôles; résidus; points singuliers essentiels.

Application des théorèmes généraux de Cauchy à la détermination des intégrales définies.

Ouvrages à consulter :

Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques.*

Bertrand, *Traité de Calcul différentiel et intégral.*

Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*

Hermite, *Cours d'Analyse* professé à la Faculté des Sciences de Paris; 4e édition, leçons VI, VII, VIII.

Picard, *Traité d'Analyse,* tome II, Chapitre V, Sections 1, 2, 3; Chapitre VI, Section 1.

Mécanique.

Équations auxquelles Lagrange a ramené la détermination du mouvement d'un système matériel quelconque.

Équations canoniques : méthode d'intégration de Jacobi; applications.

Étude particulière du mouvement dans un plan, d'après M. Darboux, *Théorie générale des surfaces*, Livre V, Chapitre VI, excepté les § 550 et 552.

Ouvrages à consulter :

Appell, *Cours de Mécanique*.
Despeyrous, *Cours de Mécanique*.
Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*.
Lagrange, *Mécanique analytique*; Note de M. Bertrand sur les équations d'Hamilton et de Jacobi, insérée à la suite de la seconde édition de la *Mécanique analytique*.

SUR L'ORIENTATION DES SYSTÈMES DE DROITES [1];

Par M. G. HUMBERT.

I. — Théorèmes fondamentaux.

1. Laguerre a fait connaître, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, plusieurs propositions géométriques très simples, relatives aux directions des systèmes de droites dans le plan, dont il a déduit des conséquences nombreuses et importantes ; nous avons eu nous-même l'occasion, dans un Mémoire sur le théorème d'Abel, de retrouver analytiquement ces propositions et de leur donner une certaine extension ; notre but est maintenant de démontrer un principe très général, auquel peuvent se rattacher toutes les propriétés énoncées jusqu'ici sur les directions des systèmes de

---

[1] Ce travail a été publié en partie dans le tome X de l'*American Journal of Mathematics*. M. Franklin, dans le tome XII du même journal, a indiqué une méthode très intéressante pour retrouver nos résultats; nous avons profité, dans notre nouvelle rédaction, de quelques-unes de ses indications.

Le § VII du travail actuel est inédit.

droites, et qui se prête aisément à des applications nouvelles.

A cet effet, nous commencerons par présenter sous une forme nouvelle une notion importante, introduite dans la Géométrie par Laguerre, celle de l'*orientation* d'un système de droites. La définition donnée par Laguerre est la suivante.

Soient, dans un plan, deux systèmes de n droites, A et A'; prenons arbitrairement un axe fixe, H, dans ce plan : si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale, à un multiple de π près, à la somme analogue pour les droites du système A', on dit que les systèmes A et A' ont même *orientation;* cette propriété est évidemment indépendante du choix de l'axe fixe H dans le plan : elle ne dépend que des directions des droites considérées.

2. Cette définition peut être transformée et précisée, au point de vue analytique, comme il suit.

Menons par l'origine des parallèles

$$y - a_1 x = 0, \qquad y - a_2 x = 0, \qquad \ldots, \qquad y - a_n x = 0$$

et

$$y - a'_1 x = 0, \qquad \ldots, \qquad y - a'_n x = 0$$

aux n droites de chacun des systèmes A et A'; soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ les angles de ces droites avec Ox, les axes étant supposés rectangulaires. On a

$$\alpha_k = \operatorname{arc\,tang} a_k, \qquad \alpha'_k = \operatorname{arc\,tang} a'_k,$$

d'où

$$e^{2i\alpha_k} = \cos(2 \operatorname{arc\,tang} a_k) + i \sin(2 \operatorname{arc\,tang} a_k),$$

c'est-à-dire

$$e^{2i\alpha_k} = \frac{1 - a_k^2}{1 + a_k^2} + i\,\frac{2a_k}{1 + a_k^2} = \frac{(1 + ia_k)^2}{1 + a_k^2} = \frac{i - a_k}{i + a_k}$$

et, par suite,

$$e^{2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} = \frac{(i-a_1)(i-a_2)\ldots(i-a_n)}{(i+a_1)(i+a_2)\ldots(i+a_n)}.$$

Soit posé maintenant

$$(y-a_1x)(y-a_2x)\ldots(y-a_nx) = f(x,y),$$
$$(y-a'_1x)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-a'_nx) = \varphi(x,y),$$

il vient

$$e^{2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)} = \frac{f(1,i)}{f(-1,i)}$$

et

$$e^{2i(\alpha'_1+\ldots+\alpha'_n)} = \frac{\varphi(1,i)}{\varphi(-1,i)}.$$

Si donc les deux systèmes A et A′ ont même orientation, c'est-à-dire si l'on a, d'après la définition,

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n = \alpha'_1+\ldots+\alpha'_n + h\pi,$$

on aura

$$\frac{f(1,i)}{f(-1,i)} = \frac{\varphi(1,i)}{\varphi(-1,i)}.$$

On peut donc considérer comme définissant l'orientation d'un système de droites issues de l'origine, représenté par l'équation homogène $f(x,y)=0$, le rapport $\frac{f(1,i)}{f(-1,i)}$. Si les droites ne passent pas toutes par l'origine, et si $f(x,y,z)=0$ est l'équation de leur ensemble, l'orientation sera définie par le rapport $\frac{f(1,i,0)}{f(-1,i,0)}$, et, plus généralement encore, si $f(x,y,z)=0$ est l'équation d'une courbe algébrique quelconque, le rapport $\frac{f(1,i,0)}{f(-1,i,0)}$ définira l'orientation du système des directions asymptotiques de cette courbe.

3. Cela posé, considérons dans un plan un système variable de n droites, dont l'équation dépend algébri-

quement d'un paramètre : l'équation de ce système est de la forme

$$(1) \qquad \alpha A + \beta B + \ldots + \lambda L = 0,$$

A, B, ..., L étant des polynômes d'ordre n en x, y, z, et α, β, ..., λ des polynômes entiers par rapport à deux paramètres t et θ liés par une relation algébrique $\varphi(t, \theta) = 0$.

L'orientation du système est définie par le quotient

$$\omega = \frac{\alpha A(-1, i, 0) + \ldots + \lambda L(-1, i, 0)}{\alpha A(1, i, 0) + \ldots + \lambda L(1, i, 0)}.$$

Pour que ω soit constant, quels que soient t et θ, c'est-à-dire pour que le système variable ait une orientation fixe, il faut et il suffit que ω ne puisse pas devenir infini, et, par suite, que toutes les valeurs de t et θ, liées par la relation $\varphi(t, \theta) = 0$, qui vérifient l'équation

$$(2) \qquad \alpha A(-1, i, 0) + \ldots + \lambda L(-1, i, 0) = 0.$$

vérifient également l'équation

$$(2\ bis) \qquad \alpha A(1, i, 0) + \ldots + \lambda L(1, i, 0) = 0.$$

D'une manière plus précise, il faut que les courbes représentées par les équations (2) et (2 *bis*), où t et θ sont les coordonnées courantes, rencontrent aux mêmes points la courbe $\varphi(t, \theta) = 0$.

Cette condition peut s'interpréter géométriquement d'une manière très élégante : les valeurs de t et θ qui vérifient l'équation (2) sont, en effet, celles qui correspondent aux systèmes (1) contenant une droite passant par le point cyclique J ($x = -1$, $y = i$, $z = 0$); de même celles qui vérifient l'équation (2 *bis*) correspondent aux systèmes contenant une droite passant par le point cyclique I ($x = 1$, $y = i$, $z = 0$); la condition

trouvée plus haut exprime donc que tout système contenant une droite (et généralement k droites) passant par I contient aussi une droite (et généralement k droites) passant par J.

La conclusion subsiste si l'équation (1) dépend algébriquement d'un nombre qnelconque de paramètres.

De là, ce résultat fondamental :

Théorème. — *Pour qu'un système variable de n droites, dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres, conserve dans le plan une orientation fixe, il faut et il suffit que lorsqu'une ou plusieurs des droites du système viennent à passer par un des points cycliques, d'autres droites du système, en même nombre, passent au même instant par l'autre point cyclique.*

Plus généralement, si l'équation (1) est celle d'une famille de courbes algébriques, on peut énoncer la proposition suivante :

Soit une famille de courbes algébriques, dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des directions asymptotiques de chacune de ces courbes soit constante, il faut et il suffit que toutes les courbes de la famille, qui passent par un des points cycliques du plan, passent en même temps par l'autre.

4. On peut faire de ces principes des applications nombreuses. Considérons d'abord le cas où un paramètre θ figure au premier degré dans l'équation d'une famille de courbes; ces courbes appartiennent alors à un même faisceau ponctuel

$$f(x, y, z) + \theta\varphi(x, y, z) = 0.$$

L'orientation du système des directions asymptotiques d'une des courbes précédentes dépend du coefficient

$$\omega = \frac{f(1, i, 0) + \theta\varphi(1, i, 0)}{f(-1, i, 0) + \theta\varphi(-1, i, 0)},$$

et de cette expression résulte immédiatement ce théorème :

Si deux courbes algébriques de degré n sont telles que leurs systèmes respectifs d'asymptotes aient même orientation, le système des asymptotes de toute autre courbe de degré n, passant par les points d'intersection des deux premières, aura même orientation que chacun des deux systèmes primitifs.

Si la courbe $\varphi = 0$ passe par les points cycliques du plan, $\varphi(1, i, 0)$ et $\varphi(-1, i, 0)$ sont nuls ; par suite :

Si deux courbes de même degré rencontrent aux mêmes points une courbe algébrique quelconque passant par les points cycliques du plan, les deux systèmes formés par leurs directions asymptotiques ont même orientation.

Comme cas particulier de cette proposition, on retrouve un théorème important, dû à Laguerre, et qu'on obtient en supposant que la courbe algébrique considérée devienne un cercle :

Si l'on groupe deux à deux, d'une manière quelconque, sur n droites, les 2n points communs à un cercle et à une courbe algébrique d'ordre n, l'orientation de chacun des systèmes de n droites ainsi obtenus est la même que celle des asymptotes de la courbe.

II. — Orientation de certains systèmes de tangentes.

5. En transformant par polaires réciproques quelques-unes des propositions qui précèdent, on arrive à des théorèmes intéressants sur l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe; ainsi, la proposition qui termine le n° 3 donne lieu à la suivante :

Soit une famille de courbes dont l'équation tangentielle dépend algébriquement d'un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point fixe O *à chacune de ces courbes demeure constante, il faut et il suffit que toutes les courbes de la famille qui touchent une des droites isotropes issues de* O *touchent l'autre droite isotrope issue de ce point.*

En particulier, si les courbes considérées appartiennent à un même faisceau tangentiel, une seule de ces courbes touchera une droite isotrope issue de O; si elle touche en même temps l'autre droite isotrope, le point O sera un foyer de cette courbe. Donc :

Soit un faisceau tangentiel de courbes algébriques de classe n; par un foyer f de l'une d'elles menons les n tangentes à l'une quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus à partir du point f ont même orientation.

Réciproquement,

Si un point f jouit de cette propriété, c'est le foyer de l'une des courbes du faisceau.

On peut dire aussi, en transformant par polaires réciproques le premier théorème du n° 3, que :

Si les tangentes menées d'un point à deux courbes

de classe n forment deux systèmes de même orientation, les n tangentes menées de ce point à une quelconque des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières forment un système de même orientation que les deux systèmes primitifs.

Si deux des courbes du faisceau sont homofocales, toutes les courbes du faisceau ont les mêmes foyers; l'une d'elles se décompose en une courbe de classe $n-2$ et en deux points, qui sont les points cycliques du plan. Un point quelconque du plan peut être considéré comme un foyer de ce système de deux points; il résulte de là, par l'application du théorème précédent, que :

Les deux systèmes formés par les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à deux courbes homofocales de même classe ont même orientation;

ou encore :

Le système des tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de classe n, et le système des droites qui joignent le même point aux n foyers réels de la courbe ont même orientation.

(Laguerre.)

En combinant ce résultat avec le précédent, on arrive à une proposition simple relative au lieu des foyers des courbes d'un même faisceau tangentiel :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A *et* B, *de classe n, est une courbe telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de* A *et aux n foyers réels de* B, *les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.*

6. Nous reviendrons plus loin, avec quelques détails,

sur les conséquences géométriques de ce théorème; auparavant, nous ferons une application des principes précédents à la solution d'un problème qui paraît présenter un certain intérêt.

Ce problème est le suivant :

Trouver toutes les courbes algébriques telles que le système des tangentes qu'on peut mener d'un point à l'une d'elles ait une orientation fixe, indépendante de la position de ce point dans le plan.

Si l'on se reporte au théorème de Laguerre démontré plus haut, on voit que ces courbes ne peuvent être que celles qui ont tous leurs foyers à l'infini; mais, avant d'affirmer inversement que les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini jouissent de la propriété énoncée, on doit faire une discussion, très simple d'ailleurs.

Soit, en effet, G une courbe de classe n dont tous les foyers sont à l'infini : il est nécessaire pour cela qu'elle touche la droite de l'infini aux points I et J, et qu'on ne puisse pas lui mener par I ou J d'autre tangente que cette droite. Dans ce cas, tous les foyers de la courbe sont à l'infini, mais leur position n'est pas déterminée, de sorte que le théorème de Laguerre ne paraît pas immédiatement applicable.

On peut voir néanmoins, d'une autre manière, que l'orientation du système des n tangentes menées à G d'un point quelconque O du plan ne dépend pas de la position de ce point. Imaginons, en effet, que O décrive une droite; l'équation du système des n tangentes issues de O contient algébriquement un paramètre, et le théorème général du n° 3 est applicable. Par suite, l'orientation de ce système est fixe, si, toutes les fois qu'une ou plusieurs des tangentes issues de O passent par le point cyclique I, d'autres tangentes en même nombre

passent par le point cyclique J. C'est précisément ce qui se présente ici ; une tangente menée de O à G ne peut passer par I que si O est à l'infini, et elle passe alors par J. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

L'orientation du système des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique ayant ses foyers à l'infini est indépendante de la position du point considéré dans le plan.

Il est facile de donner l'équation générale de ces courbes en coordonnées tangentielles rectangulaires ; cette équation est

$$(u^2+v^2)f_{n-2}(u, v) = \mathrm{F}_n(u, v),$$

f_{n-2} étant un polynôme quelconque de degré $n-2$ en u et v, et F_n un polynôme, également quelconque, de degré n, mais homogène.

7. Parmi les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini, on peut citer, avec Laguerre, celles qui sont enveloppées par une droite dont deux points donnés décrivent respectivement deux courbes algébriques, quelconques d'ailleurs.

Un autre exemple intéressant est fourni par la famille des épicycloïdes algébriques.

Si une courbe a tous ses foyers à l'infini, c'est-à-dire si les tangentes qu'on peut lui mener par les points cycliques coïncident toutes avec la droite de l'infini, la réciproque de cette courbe par rapport à un cercle de centre O sera telle que les droites isotropes issues de O ne la couperont qu'au point O.

Or la réciproque d'une épicycloïde par rapport au cercle fixe a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = k \cos \frac{1}{2n+1}\theta,$$

n désignant le rapport du rayon du cercle mobile à celui du cercle fixe; de plus n est positif pour l'épicycloïde et négatif pour l'hypocycloïde.

Halphen a étudié d'une manière complète les points multiples des courbes (3), dont il écrit l'équation

$$(4) \qquad \frac{1}{r} = k \cos \frac{p}{q} \theta,$$

p et q étant positifs et premiers entre eux. Il résulte de ses belles recherches que les courbes précédentes n'ont un point singulier à l'origine, O, que si p est plus grand que q; en ce cas, la courbe présente en O deux *cycles*, dont les tangentes sont respectivement les droites isotropes; l'ordre de ces cycles est $p - q$ ou $\frac{p-q}{2}$, selon que p et q ne sont pas ou sont tous deux impairs; la classe des cycles est $2q$ ou q. D'ailleurs le degré de la courbe est $2p$ ou p. L'une des droites isotropes issues de O a en ce point avec la courbe un nombre d'intersections égal à la somme de l'ordre et de la classe du cycle correspondant, et de l'ordre de l'autre cycle, c'est-à-dire égal à $2p$ ou à p, ou, si l'on veut, égal dans tous les cas au degré de la courbe. Elle ne coupe donc la courbe qu'au point O.

Il résulte de là qu'une épicycloïde ou hypocycloïde algébrique aura tous ses foyers à l'infini si sa réciproque a une équation de la forme (4), p et q étant positifs, et p étant supérieur à q.

Soit alors $n = \frac{\lambda}{\mu}$, λ et μ étant premiers entre eux, on aura

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2n+1} = \pm \frac{\mu}{2\lambda + \mu},$$

si μ et λ sont positifs, c'est-à-dire si la courbe est une épicycloïde, p sera toujours inférieur à q.

Si la courbe est une hypocycloïde, on devra supposer λ négatif, et l'on aura, si $\lambda = -\lambda'$,

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{\mu}{\mu - 2\lambda'}.$$

Il faut, pour que p soit supérieur à q, que μ soit, en valeur absolue, supérieur à $\mu - 2\lambda'$, c'est-à-dire que λ' soit plus petit que μ; n est alors, en valeur absolue, inférieur à 1. Donc :

Les hypocycloïdes algébriques obtenues en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle plus grand ont tous leurs foyers à l'infini;

et, par suite,

L'orientation du système des tangentes menées d'un point du plan à l'une de ces courbes est indépendante de la position du point.

Les autres courbes de la famille des épicycloïdes ou hypocycloïdes algébriques ne possèdent pas la même propriété.

III. — Application a l'hypocycloide a trois rebroussements.

8. La plus simple des hypocycloïdes qu'on vient de rencontrer est, après la droite qui correspond au cas de $n = -\frac{1}{2}$, l'hypocycloïde à trois rebroussements qui correspond à celui de $n = -\frac{1}{3}$; le théorème précédent donne une propriété des tangentes à cette courbe qui paraît nouvelle, et qu'on peut énoncer ainsi :

L'orientation du système des trois tangentes menées

d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements est la même que celle des trois axes de symétrie de la courbe.

Ce théorème permet, lorsqu'on connaît deux tangentes de l'hypocycloïde, de construire immédiatement et sans ambiguïté la troisième tangente qu'on peut mener par le point d'intersection des deux premières. On peut le regarder comme l'interprétation géométrique, dans le cas de l'hypocycloïde, de la propriété analytique fondamentale des courbes de troisième classe, propriété bien connue qu'on peut énoncer ainsi : il est possible de faire correspondre à chaque tangente d'une courbe de troisième classe un argument, de telle sorte que les arguments des trois tangentes issues d'un point quelconque aient une somme constante. En général, on ne connaît pas la signification *géométrique* de ces arguments, qui s'introduisent par la considération des fonctions elliptiques; dans le cas de l'hypocycloïde, on voit que cette signification est très simple, l'argument étant l'angle que fait la tangente avec un des axes de symétrie de la courbe.

Il importe, pour ce qui va suivre, de préciser cette notion : soit t une tangente de l'hypocycloïde; si par un point fixe O nous menons une parallèle à t et une parallèle Ox à l'un des axes de la courbe, choisi une fois pour toutes, nous désignerons par α l'angle que font ces deux droites, en le comptant à partir de Ox, dans le sens trigonométrique. Cet angle n'est défini qu'à un multiple près de π, ce qui n'a aucun inconvénient, puisque les orientations sont définies dans les mêmes conditions.

9. Cela posé, on déduit aisément du théorème fondamental les conséquences suivantes.

Soit t une tangente en un point A de l'hypocycloïde : les bissectrices de l'angle des deux tangentes autres que t, que l'on peut mener à la courbe par un point de cette droite, sont parallèles à deux directions fixes.

Ces directions sont celles des tangentes aux points B et C, où la tangente *t* rencontre de nouveau l'hypocycloïde.

On voit ainsi qu'une tangente à la courbe la rencontre de nouveau en deux points où les tangentes sont perpendiculaires l'une à l'autre : proposition bien connue, qui sert de base au beau Mémoire de M. Cremona sur l'hypocycloïde.

Par deux points quelconques d'une tangente t à l'hypocycloïde menons à la courbe les quatre tangentes autres que t : ces quatre droites forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle.

Réciproquement, si le quadrilatère complet formé par quatre tangentes de l'hypocycloïde a quatre de ses sommets sur un cercle, la droite qui joint les deux autres sommets est une tangente de la courbe.

Dans tout triangle isoscèle circonscrit à une hypocycloïde, la droite qui joint le sommet au point de contact de la base est une tangente de la courbe.

Par chaque sommet d'un triangle circonscrit à une hypocycloïde passe une nouvelle tangente, distincte des côtés du triangle : les trois droites ainsi définies forment un nouveau triangle semblable au premier [1].

---

[1] Ce dernier théorème a été donné par M. S. Kantor (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. III, p. 137); je n'avais pas connaissance du remarquable travail de M. Kantor lors de la première publication de ce Mémoire; je m'empresse de reconnaître ici ses droits de priorité.

10. Le dernier théorème mérite d'être étudié avec quelques détails ; il donne lieu à des conséquences intéressantes.

D'un triangle ABC circonscrit à l'hypocycloïde, on déduit, en menant les tangentes, distinctes des côtés, qui passent par les trois sommets un nouveau triangle $A_1 B_1 C_1$ semblable au premier ; en appliquant la même construction à $A_1 B_1 C_1$, on obtient un troisième triangle semblable aux deux premiers, et ainsi de suite. Cette série de triangles est-elle illimitée ? Retombe-t-on nécessairement sur un des triangles déjà trouvés, ou l'un des triangles finit-il par se réduire à un point ? Ce sont là des questions auxquelles il est facile de répondre par l'application du théorème fondamental.

Désignons par α, β, γ les angles que font avec un des axes de symétrie de la courbe les côtés du triangle ABC ; soit γ_1 l'angle que fait avec ce même axe la troisième tangente issue du point C. On a, d'après le théorème fondamental,

$$\gamma_1 + \alpha + \beta = h\pi,$$

d'où

$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\text{mod } \pi).$$

Par suite, les angles α_1, β_1, γ_1, que font avec l'axe considéré les trois côtés du triangle $A_1 B_1 C_1$, sont

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\text{mod } \pi),$$
$$\beta_1 \equiv \beta - (\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ce sont ces relations qui montrent la similitude des triangles ABC et $A_1 B_1 C_1$, puisque l'on en tire évidemment

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta, \qquad \alpha_1 - \gamma_1 = \alpha - \gamma, \qquad \beta_1 - \gamma_1 = \beta - \gamma.$$

Rien n'est plus aisé que de déterminer le rapport de similitude.

Remarquons, en effet, que les côtés homologues des deux triangles se coupent sous des angles égaux à $(\alpha+\beta+\gamma)$; or, d'après un théorème connu de Géométrie élémentaire, si, par les sommets d'un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés opposés, dans un même sens de rotation, des angles égaux ω, ces droites forment un nouveau triangle semblable au premier, avec un rapport de similitude égal à $2\cos\omega$.

Les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC sont donc semblables avec un rapport de similitude égal à $2\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

11. De là se déduisent de suite quelques résultats simples.

En premier lieu, si $\alpha+\beta+\gamma\equiv\pm\frac{\pi}{3}$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ est égal à $\frac{1}{2}$, et les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont égaux. On a d'ailleurs

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\equiv-2(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\pm\frac{\pi}{3}\qquad(\mathrm{mod}\ \pi),$$

et le triangle $A_2B_2C_2$ déduit de $A_1B_1C_1$ sera égal aux deux précédents. On a pour ce triangle

$$\alpha_2\equiv\alpha_1\mp\frac{\pi}{3}\equiv\alpha\mp\frac{2\pi}{3}\qquad(\mathrm{mod}\ \pi),$$

. . . .

De même pour le triangle $A_3B_3C_3$ déduit de $A_2B_2C_2$, on aura

$$\alpha_3\equiv\alpha_2-(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)=\alpha\qquad(\mathrm{mod}\ \pi).$$

. . . .

Le triangle $A_3B_3C_3$ coïncide donc avec ABC, puisqu'on ne peut mener à l'hypocycloïde qu'une seule tangente parallèle à une droite donnée.

Pour simplifier, appelons *premier triangle dérivé*, ou, plus simplement, *triangle dérivé* d'un triangle T,

circonscrit à l'hypocycloïde, le triangle T_1 formé par les tangentes menées à la courbe des sommets de T, et distinctes des côtés de T; appelons *second triangle dérivé* de T le premier triangle dérivé de T_1, et ainsi de suite. On a en premier lieu la proposition générale :

Tous les triangles dérivés d'un même triangle lui sont semblables.

La propriété démontrée dans le cas où $\alpha + \beta + \gamma = \pm \frac{\pi}{3}$ s'énonce ainsi :

Si les côtés d'un triangle T, *circonscrit à l'hypocycloïde, font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est* $\pm \frac{\pi}{3}$, *à un multiple près de* π, *les deux premiers triangles dérivés de* T *sont égaux à ce triangle, et le troisième coïncide avec* T.

En second lieu, si $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, le rapport de similitude est nul ; le triangle $A_1 B_1 C_1$ se réduit donc à un point. De plus, on a

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

ce qui montre que les côtés de $A_1 B_1 C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC. Donc :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est $\frac{\pi}{2}$, *à un multiple près de* π, *les hauteurs de ce triangle sont des tangentes de l'hypocycloïde, et le triangle dérivé se réduit par suite à un point.*

12. Reprenons maintenant les relations

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\text{mod } \pi),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

entre les angles qui correspondent à un triangle ABC et au triangle dérivé $A_1 B_1 C_1$. On a, de même, en passant au dérivé de $A_1 B_1 C_1$,

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \equiv \alpha + (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\text{mod } \pi)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En général, pour le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC, on aura des expressions de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_n &\equiv \alpha + h_n(\alpha + \beta + \gamma), \\ \beta_n &\equiv \beta + h_n(\alpha + \beta + \gamma) \qquad (\text{mod } \pi), \\ \gamma_n &\equiv \gamma + h_n(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ triangle, il viendra

$$\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) \equiv \alpha - [2h_n + 1](\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où, la loi de récurrence,

$$h_{n+1} + 2h_n + 1 = 0,$$

On en tire, puisque $h_1 = -1$,

$$h_n = \frac{(-2)^n - 1}{3},$$

et, par suite, les angles α_n, β_n, γ_n que font avec l'axe les côtés du $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC sont donnés, en fonction des angles analogues α, β, γ qui correspondent à ce triangle, par les formules

$$\alpha_n = \alpha + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\beta_n = \beta + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\gamma_n = \gamma + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Observons enfin que le rapport de similitude des triangles

$$A_n B_n C_n \quad \text{et} \quad A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$$

est égal, d'après un résultat rappelé plus haut, à

$$2 \cos \frac{(-2)^n - (-2^{n-1})}{3} (\alpha + \beta + \gamma),$$

c'est-à-dire à

$$2 \cos 2^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma).$$

13. Ces formules permettent de répondre aux questions que l'on s'était posées.

D'abord, dans quels cas la suite des triangles dérivés l'un de l'autre se terminera-t-elle à un point?

Pour que le triangle $A_n B_n C_n$ se réduise à un point, il faut que le rapport de similitude de ce triangle avec le triangle $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ soit nul, c'est-à-dire que

$$2^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma) \equiv \frac{\pi}{2} \qquad (\text{mod}\, \pi),$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2k+1}{2^n} \pi.$$

On aurait pu arriver de suite à ce résultat en écrivant que $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ est nul à un multiple près de π.

De là ce théorème, qui est la généralisation d'un résultat donné plus haut :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{2k+1}{2^n} \pi$, *la série des triangles dérivés du premier se terminera à un point, au bout de n constructions.*

Ce point sera le point de concours des hauteurs du $(n-1)^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif.

Cherchons maintenant dans quels cas on retombera, après un certain nombre de constructions sur le triangle primitif.

Il faut pour cela que l'on ait

$$\alpha_n = \alpha, \qquad \beta_n = \beta, \qquad \gamma_n = \gamma \qquad (\mathrm{mod}\, \pi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^n - 1}\pi.$$

Si n est le plus petit nombre pour lequel une relation de cette forme ait lieu, le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif coïncidera avec ce triangle, et si l'on continue les constructions, on retrouve tous les triangles déjà formés.

Mais ici se présente une particularité curieuse : c'est qu'en construisant les triangles successifs à partir du premier, il peut arriver que l'un d'eux coïncide avec l'un des précédents sans que l'on ait retrouvé de nouveau le premier triangle.

En effet, le $p^{\text{ième}}$ et le $q^{\text{ième}}$ triangle dérivé $(q > p)$ coïncideront si l'on a

$$\frac{(-2)^p - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(-2)^q - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) + k\pi,$$

c'est-à-dire

$$(-2)^p(\alpha + \beta + \gamma)[(-2)^{q-p} - 1] = 3k\pi$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^p[(-2)^{q-p} - 1]}\pi.$$

Si cette condition est remplie, k étant premier à 2, le $q^{\text{ième}}$ triangle dérivé coïncidera avec le $p^{\text{ième}}$, et, en continuant les constructions, on retrouvera indéfiniment les triangles dérivés dont l'ordre est compris entre

p et $q - 1$, sans retomber jamais sur le triangle primitif et les $p - 1$ premiers triangles dérivés. Ainsi :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{3k}{2^p[(-2)^{q-p}-1]}\pi$, *le* $q^{\text{ième}}$ *triangle dérivé de ce triangle coïncidera avec le* $p^{\text{ième}}$.

14. Il est aisé d'expliquer *a priori* pourquoi, dans le cas qui nous occupe, le triangle primitif ne se reproduit pas nécessairement : cela tient à ce que la suite des triangles dérivés n'est pas réversible sans ambiguïté, ou, en termes plus précis, à ce qu'un même triangle circonscrit à l'hypocycloïde peut être considéré comme le dérivé de deux autres triangles circonscrits, et non pas d'un seul.

Reprenons, en effet, les relations

$$\alpha_1 = \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + k\pi,$$
$$\beta_1 = \beta - (\alpha + \beta + \gamma) + l\pi,$$
$$\gamma_1 = \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) + m\pi.$$

On en tire

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{l + m - k}{2}\pi,$$
$$\beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + m - l}{2}\pi,$$
$$\gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + l - m}{2}\pi.$$

Les nombres $l + m - k$, $k + m - l$, $k + l - m$ sont de même parité; on aura donc, pour α, β, γ, à des mul-

tiples de π près, les deux systèmes de valeurs

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2},$$

$$\beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1), \qquad \gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{\pi}{2}.$$

De là ce théorème :

Dans tout triangle circonscrit à une hypocycloïde, on peut inscrire deux autres triangles circonscrits à la courbe : ces deux triangles sont semblables au premier et semblables entre eux; leurs côtés homologues sont rectangulaires (¹).

15. On pourrait pousser plus loin ces recherches, en étudiant l'ensemble des triangles circonscrits qui admettent pour triangle dérivé d'un ordre donné un même triangle circonscrit, et l'on arriverait ainsi à des résultats assez curieux que nous n'énoncerons pas, afin de ne pas fatiguer l'attention du lecteur; nous nous contenterons de signaler une proposition de nature différente qui se déduit aisément du théorème fondamental :

Soient A, B, C *les points de contact des tangentes menées à l'hypocycloïde par un point* M; *sur les directions* MA, MB, MC *portons, à partir de* M, *des longueurs* Ma, Mb, Mc, *respectivement égales aux inverses des segments* MA, MB, MC : *le point* M *est le centre de gravité du triangle abc* (²).

(¹) Ce théorème appartient à M. Kantor.

(²) La démonstration de ce théorème est analogue à celle qui est développée plus bas, aux nos 17, 18 : on prouve ainsi que le centre harmonique de A, B, C par rapport à M coïncide avec M, ce qui est

Sans insister sur les conséquences que l'on pourrait déduire de cette proposition pour la théorie de l'hypocycloïde à trois rebroussements, nous reviendrons au théorème démontré plus haut, relativement au lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes, et nous montrerons qu'il met en évidence une classe intéressante de courbes étudiées déjà à un autre point de vue par divers géomètres, et en particulier par M. Darboux.

IV. — Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes.

16. Nous avons démontré plus haut que :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A et B, de classe n, est une courbe F, telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. Groupons deux à deux, d'une manière quelconque, un foyer a_k de la courbe A et un foyer b_k de la courbe B; il est clair que le lieu F est celui des points tels que, de l'un quelconque d'entre eux, les n segments $a_k b_k$ soient vus sous des angles ayant une somme algébrique égale à un multiple de π, et l'on retrouve ainsi les courbes remarquables de M. Darboux.

Ces courbes comprennent, comme cas particuliers,

précisément notre proposition. D'une manière plus générale, on établit de même que : *si l'on mène par un point* M *les tangentes à une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, le centre harmonique des points de contact par rapport à* M *coïncide avec ce point.*

les courbes telles que l'on voie, de chacun de leurs points, n segments fixes sous des angles dont la somme algébrique est égale à une constante quelconque : il suffit, en effet, de supposer que chacune des courbes A et B a un foyer à l'infini, c'est-à-dire que ces courbes touchent toutes deux la droite de l'infini; un des segments $a_k b_k$ est alors à l'infini, et il est vu de tout point du plan sous un angle constant θ. La somme des angles sous lesquels les autres segments à distance finie sont vus d'un point quelconque du lieu F est donc constante, et égale à $-\theta$, à un multiple près de π.

De la définition même du lieu F résulte immédiatement une belle proposition, donnée par M. Darboux :

Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments ayant tous leurs extrémités sur la courbe.

Ces segments s'obtiennent en joignant deux à deux, d'une manière quelconque, les foyers de deux courbes quelconques du faisceau tangentiel déterminé par les courbes A et B qui ont servi à la définition primitive du lieu.

Si A et B touchent la droite de l'infini, il résulte de ce qui a été dit plus haut que la proposition précédente doit être modifiée ainsi :

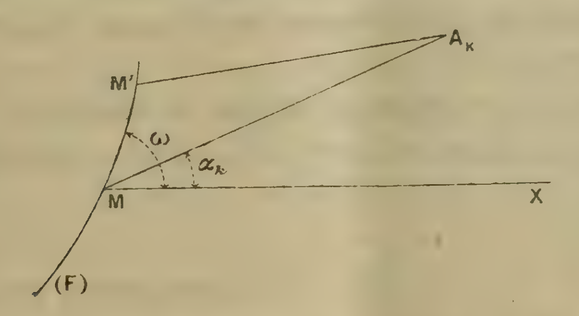
Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments, mais la valeur de la somme constante varie quand on passe d'un système de segments à l'autre.

La définition du lieu F ne dépend que de la position des foyers des courbes A et B; on peut, en particulier, supposer que chacune de ces courbes se réduise à ses n foyers réels, et l'on a ce théorème :

Si une courbe est telle qu'en joignant un quelconque de ses points à deux séries de n pôles fixes, à distance finie ou infinie, on obtienne deux systèmes de même orientation, cette courbe est le lieu des foyers des courbes de classe n qui touchent les n^2 droites joignant les pôles de l'une des séries aux pôles de l'autre série.

17. L'ensemble des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel donné jouit de quelques propriétés simples, qui dérivent aisément des principes précédents.

Soient, en effet, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les n foyers réels de la courbe A; $B_1, \ldots, B_n$ ceux de la courbe B; M le foyer d'une courbe du faisceau tangentiel déterminé par A et B; M' le point infiniment voisin de M sur le lieu F.



Menons par M un axe quelconque MX; désignons par ω l'angle M'MX, par α_k l'angle A_kMX; par β_k l'nagle B_kMX. On a, d'après la propriété fondamentale du lieu F,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$

et, en passant de M à M',

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + \ldots = d\beta_1 + d\beta_2 + \ldots$$

Or $d\alpha_k$ est l'angle $M'A_kM$, et l'on a, dans le triangle $M'A_kM$,

$$d\alpha_k = \frac{MM'}{MA_k} \sin(\omega - \alpha_k).$$

Par suite,

$$(5) \qquad \sum \frac{\sin(\omega - \alpha_k)}{MA_k} = \sum \frac{\sin(\omega - \beta_k)}{MB_k}.$$

18. Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique élégante, si l'on introduit une notion due à Laguerre.

Cette notion est celle du *centre harmonique* d'un système de points par rapport à un point.

Étant donnés, dans un plan, un point M et un groupe de n points, $A_1, \ldots, A_n$, portons sur chaque droite MA_k, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de MA_k : composons ces longueurs comme des forces; sur la direction de leur résultante, portons, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ partie de cette résultante; l'extrémité, a, du segment obtenu sera dit le *centre harmonique* des points $A_1, \ldots, A_n$ relativement au point M.

D'après cette définition, si l'on imagine par M deux axes rectangulaires MX et MY, et si α_k est l'angle de MA_k avec MX, les coordonnées du centre harmonique a seront

$$X = n\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad Y = n\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

étant posé

$$\xi = \sum \frac{\cos\alpha_k}{MA_k}, \qquad \eta = \sum \frac{\sin\alpha_k}{MA_k}.$$

On peut aussi écrire

$$\xi = n\frac{X}{X^2 + Y^2}, \qquad \eta = n\frac{Y}{X^2 + Y^2}.$$

On aura des formules analogues pour les coordonnées

du centre harmonique, b, des points $B_1, \ldots, B_n$, par rapport à M,

$$X' = n \frac{\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \qquad Y' = n \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2},$$

étant posé

$$\xi' = \sum \frac{\cos \beta_k}{MB_k}, \qquad \eta' = \sum \frac{\sin \beta_k}{MB_k}.$$

Or la relation (5) donne

$$\xi \sin \omega - \eta \cos \omega = \xi' \sin \omega - \eta' \cos \omega.$$

Remplaçons dans cette équation ξ et η, ξ' et η' par leurs valeurs en X et Y, X′ et Y′, il vient

$$\frac{X \sin \omega - Y \cos \omega}{X^2 + Y^2} = \frac{X' \sin \omega - Y' \cos \omega}{X'^2 + Y'^2}.$$

En d'autres termes, un même cercle

$$x^2 + y^2 + \lambda (x \sin \omega - y \cos \omega) = 0$$

passe par a et b : ce cercle est d'ailleurs tangent en M à la direction MM′, c'est-à-dire à la courbe F. Donc, les centres harmoniques des points $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_n$ par rapport à un même point M du lieu F, sont sur un cercle tangent à F au point M, et, comme on peut remplacer les points $A_1, \ldots, A_n$, ou $B_1, \ldots, B_n$ par les n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel déterminé par les courbes A et B, on a ce résultat :

Soit F *le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un faisceau tangentiel donné : le centre harmonique des n foyers réels de l'une quelconque de ces courbes par rapport à un point fixe, choisi arbitrairement sur* F, *reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe* F.

19. Un cas particulier remarquable est celui où le point M est un *point double* de la courbe F; l'équation

$$\xi \sin\omega - \eta \cos\omega = \xi' \sin\omega - \eta' \cos\omega$$

est alors vérifiée pour les deux valeurs de ω qui correspondent aux deux branches de la courbe passant en M, et, par suite, on a nécessairement

$$\xi = \xi', \qquad \eta = \eta'.$$

Donc :

Si la courbe F *a un point double, le centre harmonique des n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel par rapport à ce point est un point fixe.*

Il est aisé de voir que la courbe F n'aura, en général, de point double que si l'une des courbes du faisceau tangentiel passe par I et J : le point double sera alors le point commun aux tangentes menées à la courbe en I et J, c'est-à-dire le foyer singulier de cette courbe.

Un autre cas intéressant est celui où M est à l'infini et ne coïncide pas avec un des points cycliques du plan ; il est aisé de voir alors que le centre harmonique d'un groupe de points par rapport à M coïncide avec le centre des moyennes distances de ces points; or on prouve facilement que, si aucune des courbes A et B n'a de foyer à l'infini, la courbe F a une asymptote réelle, et, par suite, il résulte du théorème démontré plus haut que le centre des moyennes distances des n foyers réels d'une courbe variable, appartenant à un faisceau tangentiel déterminé, décrit une *droite*.

L'application de ces théorèmes généraux au cas d'un faisceau tangentiel de coniques présente quelque intérêt.

(*A suivre.*)

THÉORÈMES DE MÉCANIQUE;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Le succès d'un tout petit article, que j'ai publié dans ce Recueil (1) *Sur une généralisation du théorème des projections*, m'encourage à indiquer quelques autres théorèmes, dont la nature semble *a priori* très différente, mais qui ont réellement, entre eux et avec celui que je rappelle, une parenté très étroite. Ils peuvent être, comme lui, représentés symboliquement par la règle de multiplication des polynômes algébriques. Quelques-uns d'entre eux prennent aujourd'hui de l'importance par le fait de l'introduction de la Mécanique dans le programme d'admission à l'École Polytechnique.

2. Théorème I. — *Soient un système de l points* A_1, A_2, ..., A_l, *et un système de m points* B_1, B_2, ..., B_m. *On joint un point* A_λ *du premier système à un point* B_μ *du second, et l'on imagine la force représentée par le segment* $A_\lambda B_\mu$. *Si l'on considère le système des lm forces obtenues en joignant ainsi chaque point du premier système à chaque point du second, ce système de forces admet une résultante unique, représentée par lm fois la droite qui va du barycentre* A *du premier système de points au barycentre* B *du second.*

Ce théorème peut être représenté symboliquement

(1) 3e série, t. X, août 1891.

par la formule d'Algèbre

$$\Sigma[A_\lambda B_\mu] = [(A_1 + A_2 + \ldots + A_l)(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)]$$
$$= lm[AB].$$

C'est la même qui nous a servi à représenter le théorème des projections rappelé au début. Seule la signification des symboles est changée; [AB] représente la force qui va du point A au point B; $(A_1 + A_2 + \ldots + A_l)$, par exemple, représente le barycentre A avec la masse l (ou tout autre système de points ayant même barycentre et même masse totale). Le signe = signifie que les deux systèmes de forces, représentés par les deux membres et supposés appliqués à un corps solide, sont équivalents.

3. Le théorème peut être généralisé en appliquant un poids à chaque point. Le lecteur devinera la généralisation sur la formule. Une règle bien connue résulte du théorème général, dans le cas où l'un des systèmes de points se réduit à un seul point donné B.

Le *théorème de Leibnitz* est une conséquence de cette règle. On l'obtient en faisant coïncider ce point unique donné B avec le barycentre A de l'autre système de points donnés. Le *système des forces obtenues est alors en équilibre*. On obtient des énoncés spéciaux intéressants, en considérant les cas singuliers où la masse totale de l'un des systèmes, ou de chacun d'eux à la fois, est nulle. Je laisse de côté ces énoncés et aussi les démonstrations, car mon but est d'être bref, pour ne pas disperser l'attention du lecteur, mais la concentrer sur le point fondamental qui est le *rapprochement des énoncés*.

4. Théorème II. — *On donne un système de points* A_1, A_2, ..., *de masses* m_1, m_2, ... *et un système de vec-*

teurs $I_1, I_2, \ldots$. *A l'un quelconque des points donnés* A_λ, *on applique une force représentée par l'un quelconque des vecteurs donnés* I_μ *multiplié par la masse* m_λ *du point* A_λ. *Le système des forces ainsi obtenues, en combinant tous les points donnés avec tous les vecteurs donnés, a une résultante unique. Celle-ci est appliquée au barycentre* A *des points donnés. Elle est représentée par la résultante* I *des vecteurs donnés multipliée par la masse totale m des points donnés.*

Ce théorème est représenté, comme le précédent, par la formule

$$\Sigma m_\lambda [A_\lambda I_\mu] = [(m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots)(I_1 + I_2 + \ldots)] = m[AI].$$

Le lecteur devinera la signification des symboles.

5. Dans le cas particulier où l'on donne un seul vecteur I, le théorème fournit *la règle bien connue pour la composition des forces parallèles*. Cette règle apparaît ici comme un cas limite de celle qui conduit au théorème de Leibnitz (3). Il suffit d'imaginer que le point unique B du n° 3 s'éloigne à l'infini dans la direction du vecteur I.

Si l'on suppose que non seulement les points de l'un des systèmes, mais aussi ceux de l'autre, s'éloignent à l'infini, on obtient, au lieu du théorème II, le suivant :

6. Théorème III. — *On donne deux systèmes de vecteurs* $I_1, I_2, \ldots$ *et* $J_1, J_2, \ldots$. *On prend un vecteur* I_λ *du premier système et un vecteur* J_μ *du second, puis le couple* $[I_\lambda J_\mu]$ *qui a pour moment l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs, et dont le plan est parallèle à celui de ce parallélogramme. Si l'on considère le système des couples ainsi formés, en com-*

binant tous les vecteurs du premier système avec tous ceux du second, ce système de couples, supposé appliqué à un corps solide, peut être remplacé par le couple [IJ] *obtenu au moyen des résultantes* I *et* J *des deux systèmes de vecteurs donnés.*

Voilà un théorème qui, par son énoncé, semble bien éloigné des théorèmes I et II. Il n'en est cependant qu'un cas limite. Il est représenté, comme eux, par la formule

$$\Sigma [I_\lambda J_\mu] = [(I_1 + I_2 + \ldots)(J_1 + J_2 + \ldots)] = [IJ].$$

Inutile d'insister sur la signification des symboles, ni sur les cas spéciaux qui peuvent se présenter dans l'application des théorèmes II et III.

7. On peut former de la même manière les énoncés de théorèmes où figurent trois, puis quatre systèmes de points ou vecteurs donnés. Je citerai seulement les derniers de ces séries.

Théorème IV. — *On donne un système de* l, m, n *et* p *points* A_1, A_2, ..., A_l; B_1, B_2, ..., B_m; C_1, C_2, ..., C_n; D_1, D_2, ..., D_p. *Si l'on considère tous les tétraèdres qu'on peut former en prenant les quatre sommets respectivement dans chacun des quatre systèmes, leur somme algébrique est égale au tétraèdre* [ABCD], *qui a pour sommets les barycentres des quatre systèmes, multiplié par le produit* $lmnp$.

Théorème V. — *On donne trois systèmes de vecteurs* I_1, I_2, ...; J_1, J_2, ...; K_1, K_2, ... *Si l'on considère tous les tétraèdres qu'on peut construire en prenan pour les trois arêtes successives du sommet, respectivement trois vecteurs pris dans chacun des systèmes, la somme algébrique de tous ces tétraèdres est égale au*

tétraèdre [IJK] *formé avec les résultantes des trois systèmes de vecteurs donnés.*

Ces théorèmes sont encore représentés par la règle de multiplication des polynômes, savoir

$$\begin{aligned}&\Sigma[A_\lambda B_\mu C_\nu D_\varpi]\\&\quad=[\ (A_1+A_2+\ldots+A_l)(B_1+B_2+\ldots+B_m)\\&\qquad\times(C_1+C_2+\ldots+C_n)(D_1+D_2+\ldots+D_p)]\\&\quad=lmnp[ABCD],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Sigma[I_\lambda J_\mu K_\nu]\\&\quad=[(I_1+I_2+\ldots)(J_1+J_2+\ldots)(K_1+K_2+\ldots)]=[IJK].\end{aligned}$$

Je n'insiste pas sur la signification des symboles. On la devine, et j'ai hâte de revenir à des théorèmes connus, ce qui paraîtra sans doute plus intéressant.

8. Théorème VI. — *On considère deux systèmes de forces $p_1, p_2, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots$, appliqués à un corps solide. Si l'on construit tous les tétraèdres possibles, en prenant pour première arête une force du premier système et pour arête opposée une force du second, la somme algébrique de ces tétraèdres est* CONSTANTE, *quel que soit le système qu'on choisisse parmi ceux qui sont équivalents au système des forces p, et quel que soit le système qu'on choisisse parmi ceux qui sont équivalents au système des forces q.*

Ce théorème est, comme tous les précédents, représenté par la formule de multiplication des polynômes algébriques

$$\begin{aligned}\Sigma[p_\lambda q_\mu]&=[(p_1+p_2+\ldots)(q_1+q_2+\ldots)]\\&=[(p'_1+p'_2+\ldots)(q'_1+q'_2+\ldots)]=\Sigma[p'_\lambda q'_\mu].\end{aligned}$$

Dans cette formule, $[p_\lambda q_\mu]$ représente la valeur algébrique du tétraèdre, dont la première arête est p_λ et dont l'arête opposée est q_μ; $(p_1+p_2+\ldots)$ représente

non pas la somme des valeurs numériques de ces forces, mais la notion géométrique plus complexe de l'ensemble de ces forces. Le théorème montre que, comme en Algèbre, on peut remplacer $(p_1 + p_2 + \ldots)$ par *toute somme égale*, ce qui signifie ici par *tout système de forces équivalent au premier*.

9. Le *théorème de Möbius* en est un cas particulier. On l'obtient en prenant le système des forces q confondu avec celui des forces p. Pour avoir ensuite le théorème de *Chasles*, il suffit de réduire à deux le système des forces p. Dans le cas particulier où le système des forces est en équilibre ou réductible à une force unique, ou seulement à un couple (ce qui est un cas limite d'une force unique), la constante du théorème de Möbius est nulle.

10. On pourra former, comme on l'a fait, avec des systèmes renfermant seulement des points ou vecteurs, des théorèmes où figurent à la fois des systèmes de points ou vecteurs, et aussi des systèmes de forces ou de couples. On peut s'élever dans une voie illimitée, en prenant un nombre aussi grand qu'on voudra de systèmes.

11. D'un autre côté, nous avons seulement introduit des systèmes de points et de forces et leurs cas limites vecteurs et couples. On peut aussi introduire des systèmes de plans. A cet égard, chacun des théorèmes que nous avons signalés admet un théorème corrélatif où les points sont remplacés par des plans et inversement. Ce théorème corrélatif peut, il est vrai, coïncider avec un théorème déjà étudié. C'est ainsi que le théorème VI a, pour corrélatif, lui-même. Mais il

reste encore là une source abondante de théorèmes nouveaux.

12. Et maintenant, cher lecteur, entreprendrez-vous de chercher une démonstration spéciale pour chacun de tous ces théorèmes, dont l'abondance décourage même de fixer les énoncés? Vous estimerez plutôt que, malgré leur apparente diversité, tous ces théorèmes, y compris celui des projections, découlent d'un même principe. Ce principe est celui que j'ai pris pour base dans mon exposition de *la méthode de Grassmann* [1].

Le présent article a pour but de montrer deux choses, d'abord que cette méthode a son origine dans la Statique, qu'ensuite elle résume à son tour la Statique tout entière en un instrument condensé et puissant, d'un maniement souvent aussi facile que celui de l'Algèbre élémentaire, dont elle suit les règles. Dans ces règles sont renfermés tous les théorèmes connus de Statique et une infinité d'autres; il devient inutile de les savoir et même de les énoncer. La connaissance du calcul algébrique les remplace.

J'ai montré, d'autre part, le parti qu'on peut tirer de la méthode de Grassmann pour la théorie des déterminants [2]. Mais, si je l'ai fait, c'est pour faire voir le lien qui existe entre elles. La vérité est que la méthode de Grassmann supprime la théorie des déterminants, en se substituant à elle.

Voilà pour la Mécanique et l'Algèbre. Quant à la Géométrie, elle l'embrasse tout entière dans son algorithme, à la fois synthétique et analytique, qui se prête aussi bien à la Géométrie de position qu'à la Géométrie

---

[1] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI; 1892.
[2] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. X; mai et août 1891.

métrique. M. F. Caspary l'a démontré dans ses importants Mémoires ([1]), et je l'ai seulement indiqué dans mon article trop court sur *la méthode de Grassmann*. Je me propose, pour le faire voir plus complètement, de traiter bientôt quelques exemples puisés dans les matières du cours de Mathématiques spéciales.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. LE GÉNÉRAL E. DEWULF.

Construire une parabole, connaissant un de ses points A, *le cercle osculateur en* A, *et la direction de ses diamètres.*

M. d'Ocagne a donné une solution de ce problème (*Nouvelles Annales*, t. XI, 3e série, p. 327). En voici une autre, fondée sur un théorème qui a des conséquences et des applications nombreuses.

Soient un cercle (O), situé dans un plan horizontal Π, A un de ses points, S un point quelconque de la verticale qui passe par le point A. Considérons le cône dont le sommet est S et dont la base est le cercle (O). *La projection orthogonale sur* Π *de toute section plane de ce cône est une conique tangente en* A *au cercle* (O). *Si le plan sécant passe par le point* A, *cette projection* (C) *sur* Π *est osculée en* A *par le cercle* (O).

La conique (C) *et le cercle* (O) *sont deux courbes homologiques;* A *est leur centre d'homologie; la corde*

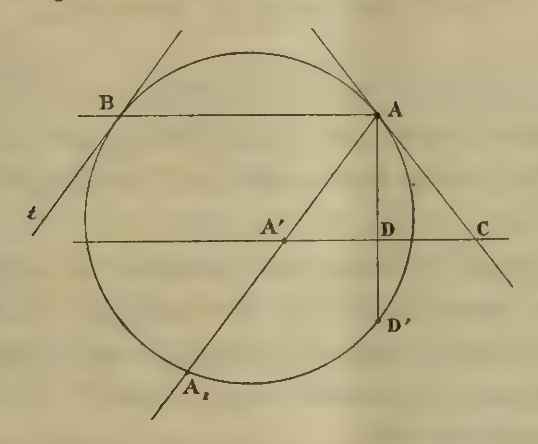
([1]) *Voir* entre autres : 1° au Tome 100 du *Journal de Crelle*, un Mémoire analysé par moi au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV; 1887; 2° *Bulletin des Sc. mathém.*, 2e série, t. XI; oct. 1887; 3° *ibid.*, t. XIII; sept. 1889.

commune à la conique et à son cercle osculateur en A *est leur axe d'homologie.*

Voici l'application au problème énoncé plus haut.

Les plans passant par A, qui coupent le cône S(O) suivant des paraboles, enveloppent un cône dont le sommet est en A et dont les génératrices sont parallèles à celles du cône S(O). De là on conclut immédiatement la construction suivante de la parabole :

Tracer par A une parallèle AB à la direction donnée; mener la tangente t en B; tracer AA_1 parallèlement à t.



La corde AA_1 est la corde commune à la parabole et à son cercle osculateur en A.

Pour construire la courbe homologique du cercle (O), A étant le centre d'homologie et AA_1 l'axe d'homologie, il suffit de connaître deux points correspondants.

Pour cela, traçons : 1° la parallèle à AB par le milieu A' de AA_1; 2° la tangente en A au cercle (O). Prenons le milieu D de A'C. Le point D appartient à la parabole et correspond au point D'. Le problème est donc résolu.

Cette construction offre cet avantage de donner en même temps qu'un point la tangente en ce point.

Extrait d'une lettre de M. le général Dewulf à M. Rouché.

Remarques. — 1° La droite CA_1 est la tangente en A_1 à la

parabole : on peut, si l'on veut, retrouver ainsi la construction de M. d'Ocagne.

2° Il est inutile de trouver directement le point D' qui correspond à D. La parabole est déterminée par le cercle (O), le centre d'homologie A, l'axe d'homologie AA_1 et le point B qui correspond au point à l'infini situé sur AB.

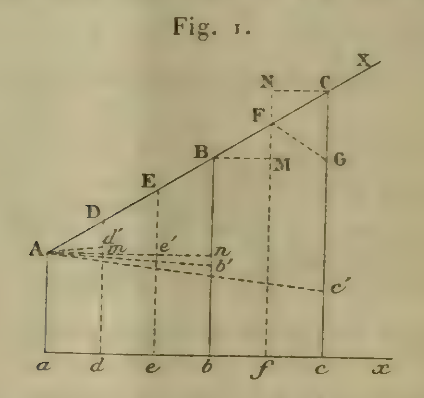
SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE;

Par M. GÉRARD.

On sait (*voir* le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, Note 2 de la 6e édition) que la somme des angles d'un triangle rectiligne est ou bien égale à deux angles droits pour tous les triangles, ou bien moindre que deux angles droits pour tous les triangles. Nous prendrons pour point de départ la seconde hypothèse ; par conséquent, la somme des angles d'un polygone de n côtés sera supposée moindre que $2n - 4$ angles droits.

Lemme I. — *Étant données deux demi-droites* AX, *ax* (*fig.* 1) *faisant avec* A*a*, *la première, un angle*

Fig. 1.



droit ou obtus, la deuxième, un angle droit ; si l'on prend sur AX, *à partir du point* A, *un segment va-*

riable AB, *que l'on projette en* ab *sur* ax, *les trois quantités*

$$Bb, \quad \frac{AB}{ab}, \quad \frac{Bb - Aa}{AB}$$

augmentent en même temps que AB.

En effet, soit $AC > AB$, et abaissons Cc perpendiculaire sur ax.

1° $Cc > Bb$. — Car élevons au milieu f de bc une perpendiculaire qui rencontre BC en un point F, et plions le quadrilatère $BFfb$ autour de Ff, le point B vient coïncider avec un point G de Cc; il faut prouver que le point G est situé entre C et c, ou que l'angle fFG est moindre que fFC. Or $fFG = fFA$, et, dans le quadrilatère $AFfa$, qui a deux angles droits a, f et un angle A droit ou obtus, il faut bien que l'angle F soit aigu, puisque la somme des angles d'un quadrilatère est supposée moindre que quatre angles droits. Ainsi l'angle fFA, étant aigu, est moindre que son supplément fFC. C. Q. F. D.

2° $\frac{AC}{ac} > \frac{AB}{ab}$. — En effet, supposons, par exemple,

$$\frac{bc}{ab} = \frac{2}{3};$$

et soit

$$ad = de = eb = bf = fc:$$

par les points d, e, f, menons des perpendiculaires à ax, qui rencontrent AX en D, E, F. Tout revient à démontrer que les segments AD, DE, ... vont en croissant à mesure qu'on s'éloigne du point A; par exemple, $FC > FB$.

Or, dans le quadrilatère $BCcb$, qui a déjà deux angles droits, l'angle C doit être moindre que le supplément de l'angle bBC, c'est-à-dire moindre que bBA ou

FGC. Par conséquent

$$FC > FG = FB.$$

Ainsi

$$\frac{BC}{AB} > \frac{bc}{ab}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{AC}{AB} > \frac{ac}{ab}. \qquad \text{C. F. Q. D.}$$

3° $\frac{Cc - Aa}{AC} > \frac{Bb - Aa}{AB}$. — En effet, supposons, par exemple,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{2}{3};$$

et soit

$$AD = DE = EB = BF = FC;$$

menons Dd, Ee, ... perpendiculaires sur ax. Tout revient à démontrer que la différence entre deux perpendiculaires consécutives va en croissant, à mesure qu'on s'éloigne du point A; par exemple, que

$$Ff - Bb < Cc - Ff.$$

Or, comme BF = FC, si l'on abaisse BM et CN perpendiculaires sur Ff, les triangles BFM, CFN sont égaux; donc

$$FM = FN \qquad \text{ou} \qquad Ff - Mf = Nf - Ff;$$

comme

$$Mf < Bb \qquad \text{et} \qquad Nf < Cc \ (1^{\circ}),$$

on en déduit

$$Ff - Bb < Cc - Ff.$$

Ainsi

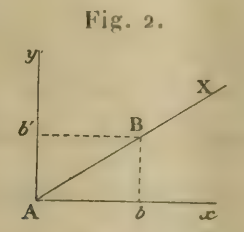
$$\frac{Cc - Bb}{Bb - Aa} > \frac{BC}{AB}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On traiterait sans peine le cas où BC et AB n'ont pas de commune mesure.

Cas particulier. — Les conclusions précédentes subsistent quand les points A et a se confondent. Donc, si l'on prend sur l'un des côtés d'un angle, à partir du

sommet, un segment variable AB (*fig.* 2), que l'on projette en Ab sur l'autre côté, les rapports $\frac{AB}{Ab}$, $\frac{Bb}{AB}$ di-

Fig. 2.



minuent en même temps que AB. De même, en projetant le point B en b' sur la perpendiculaire à Ax au point A, on voit que le rapport $\frac{Ab'}{AB}$ augmente à mesure que AB diminue. Donc, si l'on fait tendre AB vers zéro, le rapport $\frac{Bb}{BA}$, qui va en décroissant et qui reste supérieur au rapport *croissant* $\frac{Ab'}{AB}$, tend vers une limite *différente de zéro*.

Lemme II. — *Revenons à la fig.* 1, *et abaissons* Ab' *perpendiculaire sur* Bb, *je dis que* $\frac{Ab'}{ab}$ *diminue lorsque* ab *augmente, le point* A *restant fixe, c'est-à-dire que, en abaissant* Ac' *perpendiculaire sur* Cc, *on a*

$$\frac{Ac'}{ac} < \frac{Ab'}{ab}.$$

En effet, supposons toujours

$$\frac{bc}{ab} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad ad = de = eb = bf = fc,$$

puis abaissons Ad', Ae', ... perpendiculaires sur Dd, Ee, ...; tout revient à démontrer que la différence entre deux perpendiculaires va en diminuant, à mesure qu'on s'éloigne du point A, par exemple,

$$Ab' - Ae' < Ae' - Ad'.$$

Or, en appelant m et n les points de rencontre de Ae' avec Dd et Bb, il est clair que $me' = ne'$, et par conséquent

$$Ab' - Ae' < e'n = e'm < Ae' - Ad'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, supposons que les droites AX et ax (*fig.* 1) soient toutes deux perpendiculaires à Aa, et faisons tendre AB vers zéro, le rapport $\frac{AB}{ab}$, qui va constamment en décroissant, tend vers une limite *à laquelle il reste constamment supérieur;* soit $f(aA)$ cette limite qui ne dépend que de aA.

D'autre part, le rapport $\frac{Ab'}{ab}$ augmente à mesure que ab diminue, tout en restant inférieur à $\frac{AB}{ab}$, donc

$$\frac{Ab'}{ab} < f(aA).$$

J'en conclus d'abord $f(aA) > 1$; ensuite, de même que, dans le quadrilatère trirectangle $Ab'ba$, $\frac{Ab'}{ab}$ est moindre que $f(aA)$, de même, dans le quadrilatère trirectangle $ABba$, $\frac{AB}{ab}$ est moindre que $f(bB)$. Ainsi

$$(1) \qquad f(Aa) < \frac{AB}{ab} < f(bB).$$

Reste à déterminer la forme de la fonction f. Pour cela, je vais montrer qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(2) \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

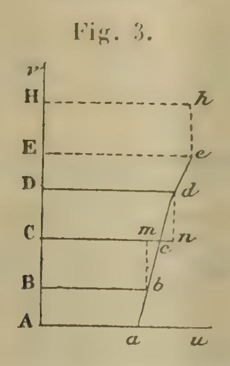
quelles que soient les deux longueurs x et y.

Sur l'un des côtés d'un angle droit uAv (*fig.* 3), prenons trois longueurs

$$AB = x - y, \qquad AC = x, \qquad AD = x + y;$$

sur la perpendiculaire à AD au point D, prenons un point arbitraire d, abaissons da perpendiculaire sur Au,

Fig. 3.



et soient b, c les points de rencontre de ad avec les perpendiculaires à AD aux points B et C; enfin abaissons bm et dn perpendiculaires sur Cc.

1° Comme BC = CD, le lemme I nous apprend que bc est moindre que cd, par conséquent, mc moindre que cn; donc

$$2\,\mathrm{C}c < \mathrm{C}m + \mathrm{C}n.$$

Or

$$\frac{\mathrm{D}d}{\mathrm{C}n} > \frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{C}m} > f(y);$$

donc

$$\mathrm{D}d + \mathrm{B}b > 2\,\mathrm{C}c\, f(y),$$

d'où, en divisant par Aa et faisant tendre Dd vers zéro,

$$f(x+y) + f(x-y) \geqq 2 f(x) f(y).$$

2° Posons $\frac{cd}{bc} = \mu$, le lemme I nous apprend aussi que $\frac{cn}{cm}$ est moindre que μ, donc

$$\mathrm{C}c > \frac{\mathrm{C}n + \mu\,\mathrm{C}m}{1+\mu}.$$

Or prenons sur le prolongement de ad un point quelconque e, que nous projetons en E sur AD; prenons, sur le prolongement de AE, une longueur EH = r;

enfin projetons le point e en h sur la perpendiculaire à AH au point H; nous aurons

$$\frac{Bb}{Cm} < \frac{Dd}{Cn} < \frac{Ee}{Hh},$$

d'où

$$Dd + \mu Bb < (1+\mu) Cc \frac{Ee}{Hh}$$

ou

$$\frac{Dd}{Aa} + \mu \frac{Bb}{Aa} < (1+\mu) \frac{Cc}{Aa} \frac{Ee}{Hh};$$

d'où, en faisant tendre Ee vers zéro, le point E *restant fixe,* et, en remarquant que μ tend vers 1, car

$$1 < \mu < \frac{cd}{CD} < \frac{CD + Cc + Dd}{CD} < 1 + 2\frac{Ee}{CD},$$

on trouve

$$f(x+y) + f(x-y) \leqq 2f(x)f(y).$$

Donc enfin

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, soit a une ligne quelconque, comme $f(a) > 1$, on peut trouver un nombre positif α, tel que

$$f(a) = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \operatorname{ch}\alpha;$$

ensuite, en calculant successivement $f(2a)$, $f(3a)$, ... par la formule (2), on trouve

$$f(na) = \operatorname{ch} n\alpha;$$

d'où l'on déduit

$$f\left(\frac{1}{n}a\right) = \operatorname{ch}\frac{\alpha}{n}, \qquad f\left(\frac{m}{n}a\right) = \operatorname{ch}\frac{m}{n}\alpha$$

et, en général,

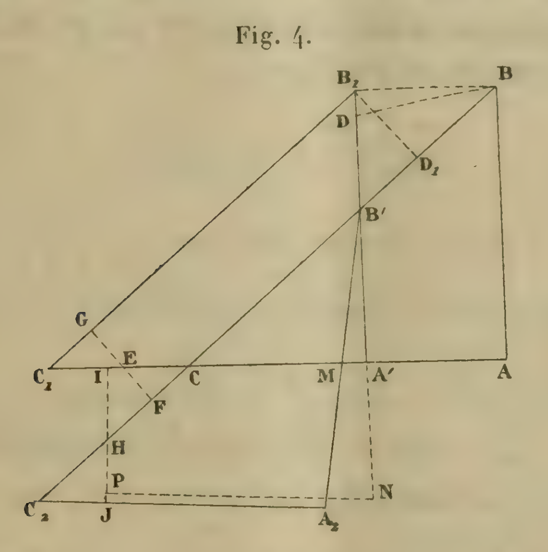
$$f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\alpha\right),$$

quelle que soit la longueur x. Si donc on désigne par k la longueur $\frac{1}{\alpha}a$, que Bolyai appelle l'*unité naturelle* de longueur, on aura

$$(3) \qquad f(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{k}.$$

Cherchons maintenant la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A (*fig.* 4). D'un point B′ pris sur le prolongement de l'hypoténuse, abaissons B′A′ perpendiculaire sur AC; faisons glisser le

Fig. 4.



triangle A′B′C le long de AC jusqu'en AB_1C_1, puis le long de BC jusqu'en A_2BC_2. Puis, par le milieu E de CC_1, menons à BC une perpendiculaire EF, qui sera aussi perpendiculaire à B_1C_1 en un point G tel que EF = EG. De même, la perpendiculaire HI à la droite AC, menée par le milieu de CC_2, est aussi perpendiculaire à A_2C_2 en un point J, tel que HI = HJ. Enfin menons B_1D_1 perpendiculaire à BC et B′D perpendiculaire sur AB; nous avons vu que, si l'on fait tendre BB′ vers zéro, on a

$$\lim \frac{B'D}{BB'} = \lim \frac{B_1D_1}{BB_1};$$

de même, $\frac{\text{IH}}{\text{CH}}$ et $\frac{\text{EF}}{\text{EC}}$ tendent vers la même limite; donc

$$\lim \frac{\text{IJ}}{\text{CC}_2} = \lim \frac{\text{FG}}{\text{CC}_1},$$

d'où, en divisant membre à membre et en remarquant que $\text{CC}_2 = \text{BB}'$ et $\text{CC}_1 = \text{AA}'$,

$$(4) \qquad \lim \frac{\text{B}'\text{D}}{\text{AA}'} \lim \frac{\text{BB}_1}{\text{IJ}} = \lim \frac{\text{B}_1\text{D}_1}{\text{FG}}.$$

Or, en appliquant les formules (1) et (3) au quadrilatère trirectangle $\text{AA}'\text{B}'\text{D}$, on a

$$\text{ch}\,\frac{\text{AD}}{k} < \frac{\text{B}'\text{D}}{\text{AA}'} < \text{ch}\,\frac{\text{A}'\text{B}'}{k};$$

donc, si l'on fait tendre BB' vers zéro, $\frac{\text{B}'\text{D}}{\text{AA}'}$ tend vers $\text{ch}\,\frac{\text{AB}}{k}$; de même, en considérant le quadrilatère FGB_1D_1, on voit que $\frac{\text{B}_1\text{D}_1}{\text{FG}}$ tend vers $\text{ch}\,\frac{\text{BC}}{k}$.

Reste $\frac{\text{BB}_1}{\text{IJ}}$; comme $\text{AB}_1 = \text{A}_2\text{B}$, en appelant M le point de rencontre de A_2B avec AC, on voit que $\text{BB}_1 > \text{A}_2\text{M}$, donc

$$\frac{\text{BB}_1}{\text{IJ}} > \frac{\text{A}_2\text{M}}{\text{IJ}} > \text{ch}\,\frac{\text{JA}_2}{k};$$

d'autre part, en prenant sur le prolongement de BA une longueur $\text{AN} = \text{BB}_1$, et en abaissant NP perpendiculaire sur IJ, on a aussi

$$\frac{\text{BB}_1}{\text{IP}} = \frac{\text{AN}}{\text{IP}} < \text{ch}\,\frac{\text{PN}}{k};$$

mais, comme $\text{BN} = \text{BA}_2$, le point N tombe dans l'angle BC_2A_2 et le point P, entre I et J; donc $\text{IP} < \text{IJ}$, et l'on

a, *a fortiori,*

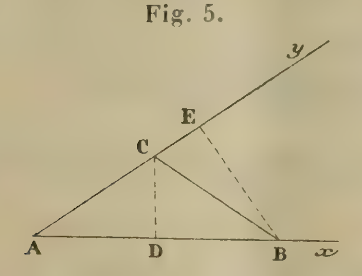
$$\frac{BB_1}{IJ} < \text{ch}\,\frac{PN}{k} < \text{ch}\,\frac{PI + IA + AN}{k}.$$

Les relations précédentes montrent que $\frac{BB_1}{IJ}$ tend vers $\text{ch}\,\frac{AC}{k}$; et alors l'équation (4) donne

$$(5) \qquad \text{ch}\,\frac{AB}{k}\,\text{ch}\,\frac{AC}{k} = \text{ch}\,\frac{BC}{k}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons maintenant un triangle quelconque ABC (*fig.* 5); supposons l'angle A aigu et menons la hau-

Fig. 5.



teur CD. En appliquant la formule (5) aux triangles rectangles BCD, ACD, on a

$$\text{ch}\,\frac{BC}{k} = \text{ch}\,\frac{CD}{k}\,\text{ch}\,\frac{AB - AD}{k},$$
$$\text{ch}\,\frac{AC}{k} = \text{ch}\,\frac{CD}{k}\,\text{ch}\,\frac{AD}{k};$$

d'où, en se servant des notations et des formules

$$\text{sh}\,x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \text{th}\,x = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x},$$
$$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}\,x\,\text{ch}\,y \pm \text{sh}\,x\,\text{sh}\,y,$$

on déduit

$$\text{ch}\,\frac{BC}{k} = \text{ch}\,\frac{AB}{k}\,\text{ch}\,\frac{AC}{k} - \text{sh}\,\frac{AB}{k}\,\text{sh}\,\frac{AC}{k}\,\frac{\text{th}\,\frac{AD}{k}}{\text{th}\,\frac{AC}{k}}.$$

De même, en abaissant la hauteur BE, on a

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} - \operatorname{sh}\frac{AB}{k}\operatorname{sh}\frac{AC}{k}\,\frac{\operatorname{th}\frac{AE}{k}}{\operatorname{th}\frac{AB}{k}};$$

donc

$$\frac{\operatorname{th}\frac{AD}{k}}{\operatorname{th}\frac{AC}{k}} = \frac{\operatorname{th}\frac{AE}{k}}{\operatorname{th}\frac{AB}{k}},$$

c'est-à-dire que la valeur commune de ces deux rapports ne dépend pas des longueurs AB ou AC, mais seulement de l'angle A : c'est cette valeur qu'on appelle le *cosinus* de l'angle A, de sorte que

$$\operatorname{ch}\frac{BC}{k} = \operatorname{ch}\frac{AB}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k} - \operatorname{sh}\frac{AB}{k}\operatorname{sh}\frac{AC}{k}\cos A.$$

En supposant l'angle A obtus, on arriverait à la même formule, à condition de définir le cosinus d'un angle obtus comme égal au cosinus du supplément de cet angle *précédé du signe* —.

Ainsi les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle sont liés par les relations

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos A,$$

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k} - \operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\cos B,$$

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos C.$$

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE CERTAINES COURBES;

PAR M. R. GODEFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Considérons une courbe quelconque rapportée à un systèmes d'axes rectangulaires xOy. En un point $A(x, y)$ de la courbe, le centre de courbure est C; la normale AC rencontre Ox au point $B(X, o)$ sous l'angle α; les perpendiculaires en B et C à Ox et à AC se coupent au point M.

On a

$$\frac{BM}{CA} = \frac{d(B)}{d(A)},$$

mais

$$BM = \frac{CB}{\sin\alpha},$$

$$d(B) = dX,$$

$$d(A) = \frac{dx}{\sin\alpha};$$

ces valeurs, portées dans la formule ci-dessus, la transforment en celle-ci

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx}\sin^2\alpha,$$

dont nous allons faire usage,

Les courbes que nous avons en vue sont celles dont les distances r, r' d'un quelconque de leurs points à un point fixe O et à une droite fixe PQ sont liées par la

relation

$$\frac{r^m}{r'^n} = \text{const.},$$

m et n étant quelconques.

Prenons respectivement pour axes de coordonnées Ox et Oy la perpendiculaire et la parallèle à PQ, menées par le point O.

Conservons d'ailleurs les notations du lemme.

On aura

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$r' = x + a,$$

et l'équation de la courbe pourra toujours se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 - K(x+a)^p = 0.$$

On a ici

$$X = \frac{pKy(x+a)^{p-1}}{2y} = \frac{pK(x+a)^{p-1}}{2};$$

la formule

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx}\sin^2\alpha$$

deviendra

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}K(x+a)^{p-2}\sin^2\alpha;$$

mais, de l'équation de la courbe, on tire

$$K(x+a)^{p-2} = \frac{x^2+y^2}{(x+a)^2};$$

or

$$\frac{x^2+y^2}{(x+a)^2} = \frac{r^2}{r'^2},$$

donc

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{r^2}{\dfrac{r'^2}{\sin^2\alpha}}.$$

Soit l la longueur du segment de la tangente compris entre son point de contact A et son point de ren-

contre T avec PQ, on a

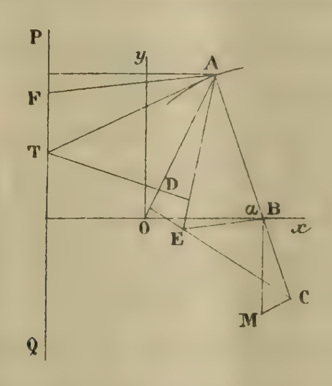
$$\frac{r'^2}{\sin^2\alpha} = l^2,$$

par suite

$$\frac{\text{CB}}{\text{CA}} = \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{r^2}{l^2}.$$

Cette relation conduit à la construction suivante :

Prendre sur AO le segment $\text{AD} = \sqrt{\frac{p(p-1)}{2}}\,r$; joindre TD, mener du point A la droite AE perpendiculaire à TD jusqu'en E, où elle rencontre la droite BE



parallèle à AF. Cette dernière est symétrique de AE par rapport à la bissectrice de l'angle OAT. La perpendiculaire à AO menée du point E rencontre la normale AB au centre de courbure C.

En effet, les triangles CBE, CEA sont tous deux semblables au triangle ADT.

Il en résulte les proportions

$$\frac{\text{CB}}{\text{CE}} = \frac{\text{CE}}{\text{CA}} = \frac{\text{AD}}{\text{AT}};$$

d'où

$$\frac{\text{CB}}{\text{CA}} = \frac{\text{AD}^2}{\text{AT}^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{CB}}{\text{CA}} = \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{r^2}{l^2}.$$

Cette construction est la généralisation d'une construction bien connue du centre de courbure des sections coniques.

LE RESTE DE LA SÉRIE DE TAYLOR;

Par M. E. AMIGUES.

1. M. Darboux a démontré depuis longtemps que le reste de la série de Taylor, dans le cas d'une fonction de variable imaginaire, est susceptible de prendre une forme tout à fait analogue à celle qu'on obtient dans les Cours élémentaires d'Analyse, pour le cas particulier d'une fonction de variable réelle (*Journal de M. Resal*, 1876). Nous pensons qu'il y a quelque intérêt à déduire le résultat de M. Darboux de l'intégrale curviligne qui sert de reste dans la méthode de développement de Cauchy. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette Note.

Nous commencerons par généraliser une formule donnée par M. Darboux dans le Mémoire déjà cité.

Soit L un contour quelconque décrit par la variable z et une intégrale prise le long de ce contour

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{L}} f(z)\,\varphi(z)\,dz.$$

Le module de l'intégrale est au plus égal à la somme des modules de ses éléments. On a donc, en désignant par θ un nombre compris entre o et 1,

$$\operatorname{mod} \mathrm{I} = \theta \int_{\mathrm{L}} \operatorname{mod} f(z) \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

μ étant une valeur convenable comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\operatorname{mod} f(z)$; on a

$$\operatorname{mod} I = \theta\mu \int_L \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz.$$

Mais, quand la variable z décrit l'arc L, il y a au moins un point ξ de cet arc pour lequel

$$\operatorname{mod} f(\xi) = \mu.$$

La formule peut donc s'écrire

$$\operatorname{mod} I = \theta \operatorname{mod} f(\xi) \int_L \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz.$$

Soit

$$f(\xi) = e^{\omega i} \operatorname{mod} f(\xi).$$

On a alors

$$\operatorname{mod} I = \theta e^{-\omega i} f(\xi) \int_L \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

d'où l'on conclut

$$I = \theta e^{(\alpha-\omega) i} f(\xi) \int_L \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

ou bien, en posant

$$\lambda = \theta e^{(\alpha-\omega) i},$$

$$\text{(A)} \qquad I = \lambda f(\xi) \int_L \operatorname{mod} \varphi(z) \operatorname{mod} dz,$$

λ étant un facteur dont le module est moindre que 1.

Supposons le cas d'une variable réelle, c'est-à-dire imaginons que la ligne L soit un segment de l'axe des x compris entre a et b ($a < b$). Alors on a

$$\operatorname{mod} dz = dx.$$

Supposons, en outre, que la fonction $\varphi(x)$ soit une fonction réelle, qui demeure positive entre a et b, de

façon que l'on ait également

$$\operatorname{mod} \varphi(z) = \varphi(x).$$

La formule (A) devient, dans ce cas,

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{I} = \lambda f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

et ξ est l'abscisse d'un point du segment de l'axe des x. La formule (B) est la formule de M. Darboux.

2. $f(z)$ étant une fonction monodrome avec dérivée finie, dans une courbe fermée C contenant un cercle de rayon R et de centre a, on sait que l'on a pour tout point

$$x = a + t$$

situé dans ce cercle

$$f(a+t) = f(a) + \frac{t}{1} f'(a) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \mathrm{R},$$

la valeur de R étant donnée par la formule

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \frac{t^n f(z)\, dz}{(z-a)^n (z-a-t)},$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct et le long de la courbe qui contient le cercle. On peut écrire

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{R} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n \frac{f(z)\, dz}{z-x}.$$

M. Hermite, partant de cette expression, en déduit, pour le cas des variables réelles, la forme du reste connue sous le nom de *forme de Lagrange*. Nous imiterons d'abord le calcul de M. Hermite (*Cours d'Analyse*, 4e édition, p. 72). Puis nous appliquerons notre formule (A).

La formule (C) persiste quand on déplace le centre a

du cercle sans changer x, pourvu que le cercle ne cesse pas de contenir x ni d'être contenu tout entier dans la courbe C. On peut donc différentier les deux membres de la formule (C), en regardant a comme variable et R comme fonction de a. On a ainsi

$$\frac{dR}{da} = \frac{-n(x-a)^{n-1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

c'est-à-dire, par une formule connue,

$$\frac{dR}{da} = \frac{-(x-a)^{n-1}f^n(x)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

En d'autres termes, en posant

$$G(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{x-u}{z-u}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

on a

$$\frac{dG(u)}{du} = \frac{-(x-u)^{n-1}f^n(u)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

On peut alors intégrer les deux membres, en faisant décrire à la variable u une ligne quelconque située dans la courbe C. Nous prendrons pour ligne d'intégration la droite ax

$$G(x) - G(a) = \int_{ax} \frac{-(x-u)^{n-1}f^n(u)\,du}{1.2\ldots(n-1)};$$

mais on a

$$G(x) = 0, \qquad G(a) = R.$$

Donc

$$\text{(D)} \qquad R = \int_{ax} \frac{(x-u)^{n-1}f^n(u)\,du}{1.2\ldots(n-1)}.$$

On peut écrire ceci

$$1.2\ldots(n-1)\,R = \int_{ax} (x-u)^{n-p}f^n(u)(x-u)^{p-1}\,du.$$

Désignant par ξ un point convenable du segment de

droite ax et appliquant la formule (A), on obtient

$$1.2\ldots(n-1)\mathrm{R} = \lambda(x-\xi)^{n-p} f^n(\xi) \int_{ax} \operatorname{mod}(x-u)^{p-1} \operatorname{mod} du.$$

Or on a

$$(x-\xi)^{n-p} = (x\xi)^{n-p} e^{\beta i},$$

et le produit $\lambda e^{\beta i}$ est, comme λ, un facteur de module inférieur à 1, que nous représenterons par λ'. La formule devient alors

$$1.2\ldots(n-1)\mathrm{R} = \lambda'(x\xi)^{n-p} f^n(\xi) \int_{ax} \operatorname{mod}(x-u)^{p-1} \operatorname{mod} du.$$

Le point u décrivant ax, soit α la distance variable xu, on a

$$\operatorname{mod}(x-u) = \alpha, \qquad \operatorname{mod} du = d\alpha.$$

D'autre part, en désignant par ρ le module de $(x-a)$, c'est-à-dire la longueur ax, et par θ un nombre compris entre 0 et 1, on a aussi

$$x\xi = \rho(1-\theta).$$

La formule devient alors

$$1.2.3\ldots(n-1)\mathrm{R} = \lambda' \rho^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^n(\xi) \int_0^\rho \alpha^{p-1} d\alpha,$$

ou bien enfin

$$\mathrm{R} = \lambda' \frac{\rho^n}{1.2\ldots(n-1)} \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p} f^n(\xi).$$

C'est la formule de M. Darboux. On voit qu'elle ne diffère que par le facteur λ' de la formule relative au cas de la variable réelle.

On trouve d'autres formules, soit en suivant le chemin rectiligne ax, soit en suivant d'autres chemins. Mais elles ne m'ont pas paru intéressantes.

PROPRIÉTÉ D'UNE CLASSE DE COURBES;

Par M. WEILL.

Théorème. — *Si l'on coupe la courbe qui a pour équation $y^m = x^p$ par une droite quelconque, et si l'on mène les tangentes à la courbe aux points d'intersection, elles forment un polygone dont tous les sommets sont sur une courbe qui a pour équation $y^m = kx^p$; en particulier, si la droite est tangente à la courbe, on a $k = 1$.*

Un point de la courbe a pour coordonnées

$$x = \theta^m, \qquad y = \theta^p.$$

L'équation qui donne les valeurs de θ relatives aux points de rencontre d'une droite $x = Ay + B$ et de la courbe est

$$\theta^m = A\theta^p + B.$$

La tangente au point θ a pour équation

$$(p - m)\theta^m - px + my\theta^{m-p} = 0.$$

Considérons deux points de rencontre θ, θ', et posons $\theta^p = \lambda$, $\theta'^p = \lambda'^p$, nous aurons

$$\theta^m = A\theta^p + B,$$
$$\theta'^m = A\theta'^p + B.$$

d'où

$$(\theta\theta')^{mp} = [(A\theta^p + B)(A\alpha'^p + B)]^p$$

ou

(1) $$(\lambda\lambda')^m = [(A\lambda + B)(A\theta' + B)]^p.$$

D'autre part, les tangentes aux deux points ont pour

équations

$$(p-m)\theta^m - px + my\theta^{m-p} = 0,$$
$$(p-m)\theta'^m - px + my\theta'^{m-p} = 0;$$

remplaçons dans ces équations θ^p par λ et θ^m par $A\lambda + B$, nous aurons

$$(p-m)(A\lambda + B) - px < my\,\frac{A\lambda + B}{\lambda} = 0$$

ou

$$(2)\quad A\lambda^2(p-m) + \lambda[B(p-m) - px + Amy] + Bmy = 0;$$

dans cette équation, x, y sont les coordonnées du point de rencontre des deux tangentes, et cette équation admet pour racines λ et λ'; donc

$$\lambda\lambda' = \frac{Bmy}{A(p-m)},$$
$$\lambda + \lambda' = \frac{B(p-m) - px + Amy}{A(m-p)};$$

transportons ces valeurs dans l'équation (1), nous voyons que les coordonnées (x, y) vérifient l'équation

$$\left[\frac{Bmy}{A(p-m)}\right]^m = \left[\frac{A^2Bmy}{A(p-m)} - \frac{B(p-m) - px + Amy}{A(p-m)}\,AB + B^2\right]^p$$

ou

$$y^m = x^p\,\frac{p^p(p-m)^{m-p}A^{m-p}}{m^m B^m}.$$

Il est facile de vérifier que le coefficient de x^p est 1 si la droite est tangente à la courbe donnée.

Remarques. — 1° En transformant la courbe en elle-même par polaires réciproques, on a l'énoncé suivant : Si d'un point du plan on mène à la courbe des tangentes, les droites qui joignent deux à deux les points de contact sont tangentes à une courbe de même espèce.

2° En transformant homographiquement, on a la courbe

$$\alpha^m = \beta^p \gamma^{m-p},$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires; en appliquant ensuite la transformation du deuxième ordre définie par les formules

$$x = y'z', \qquad y = x'z', \qquad z = x'y',$$

qui transforme la courbe en elle-même, on a un énoncé où les droites sont remplacées par des coniques passant par les trois points fondamentaux.

3° L'équation $y^m = x^p$ peut s'écrire $y = x^k$, k étant quelconque, entier ou fractionnaire; mais le théorème est encore vrai si l'on suppose k incommensurable : la courbe est alors transcendante, et le nombre des sommets du polygone demeure infini.

4° Lorsque la droite $x = Ay + B$ se déplace en restant tangente à la courbe

$$y^m = \lambda x^p,$$

si, aux points où elle coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les tangentes, le lieu des sommets du polygone formé par ces tangentes est la courbe

$$y^m = \lambda' x^p.$$

5° Si, aux points où une droite $x = Ay + B$ coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les normales, les sommets du polygone formé par ces normales sont sur la courbe

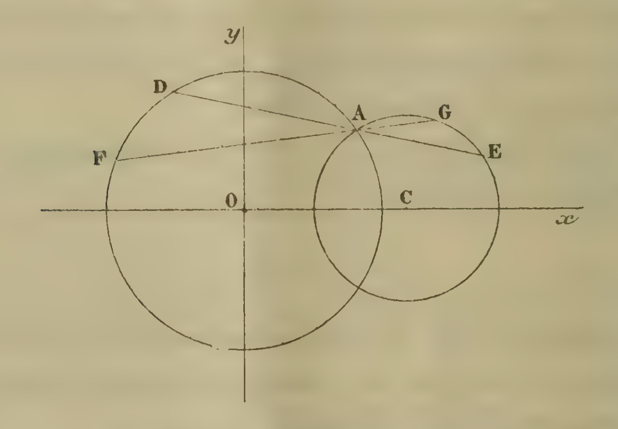
$$(B - x)^m = \lambda(Ay + B)^p.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1892 (DEUXIÈME SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires et un point A dont les coordonnées sont p et q. Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine et l'autre un point C de l'axe des x dont l'abscisse est a.

Par le point A on mène deux sécantes DAE, FAG ayant une



longueur commune donnée $2l$ (les points D et F sont sur l'une des circonférences, et les points E et G sont sur l'autre).

1° Former l'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes DAE, FAG avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C;

2° Si l'on assujettit une des coniques Δ à passer par un point P du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point P;

3° Déterminer le lieu du centre des coniques Δ.

4° En faisant varier l, trouver le lieu du point de rencontre des cordes DF, EG.

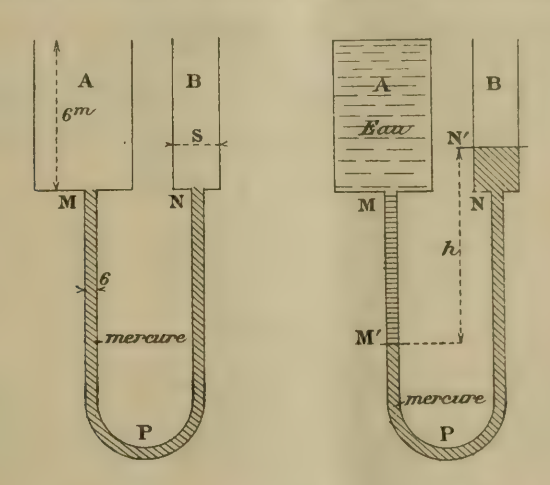
Calcul trigonométrique.

Calculer les côtés d'un triangle et la surface de ce triangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit et deux angles A, B.

$$r = 347^m,5432,$$
$$A = 102^\circ 23' 43'',7,$$
$$B = 42^\circ 37' 24'',5.$$

Physique.

I. Deux vases, A et B, d'une profondeur de 6^m, sont réunis par un tube MNP de grande longueur rempli de mercure; les ouvertures M et N sont dans un même plan horizontal. On verse dans le vase A de l'eau, jusqu'à ce qu'il en soit complètement



rempli: l'eau refoule le mercure du tube en M' d'un côté, en N' de l'autre.

On demande d'évaluer la distance h des niveaux M', N', sachant que le rapport $\frac{\sigma}{S}$ des sections du tube MNP et du vase B est égal à $\frac{1}{10}$ et que la densité du mercure est 13,59.

II. Un rayon de lumière jaune tombe, sous une incidence i, de l'air sur la surface plane de séparation de l'air et d'un milieu M dont l'indice de réfraction relatif à l'air est m.

On demande d'expliquer la construction d'Huygens permettant de trouver la position du rayon réfracté.

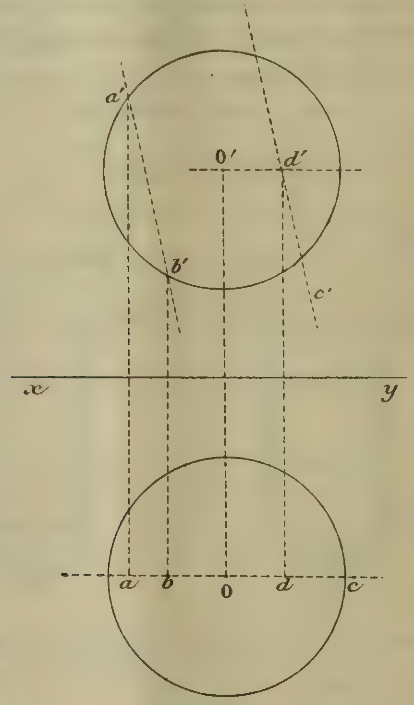
Chimie.

I. De l'eau oxygénée.

II. Établir, à l'aide de l'eudiomètre à mercure, la composition du gaz des marais.

Épure.

On donne une sphère pleine, on la coupe par un cylindre, on enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cylindre, on demande de représenter par ses projections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.



Le centre de la sphère est projeté en O, O'; les points *o* et o' sont à $0^m,102$ de la ligne de terre et la droite OO' est au milieu de la feuille; le rayon de la sphère à $0^m,092$ de longueur.

La surface cylindrique de l'entaille est engendrée par la droite (ab, $a'b'$) qui tourne autour de l'axe (cd, $c'd'$). On a

$$Oa = 0^m,061, \qquad Ob = Od = 0^m,031.$$

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ;

2° Les points situés sur les contours apparents de la sphère et du cylindre ;

3° Le point le plus haut en projection verticale ;

4° Le point le plus à droite en projection verticale.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Sphère entaillée par un cylindre.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.

Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$. La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à $0^m,205$ du petit côté inférieur.

SOLUTION, PAR LA GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1892;

PAR M. E. GENTY [1].

Soient

$$S\rho\varphi\rho = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde E, le centre O de cet ellipsoïde étant pris pour origine ; σ le vecteur du sommet S du cône Q ;

$$S(\rho - \sigma)\psi(\rho - \sigma) = 0$$

l'équation de ce cône ; α, β et γ les vecteurs de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E.

Le plan diamétral conjugué, dans le cône, du vecteur α a pour équation

$$S(\rho - \alpha)\psi\alpha = 0,$$

et, si $k\alpha$ est le vecteur du point A, on déterminera k par

[1] *Voir,* pour l'énoncé, *Nouvelles Annales,* page 314, année 1892.

l'équation

$$S(k\alpha - \sigma)\psi\alpha = 0,$$

d'où

$$k = \frac{S\sigma\psi\alpha}{S\alpha\psi\alpha}.$$

Les points A, B et C ont donc respectivement pour vecteurs

$$\frac{S\sigma\psi\alpha}{S\alpha\psi\alpha}\alpha, \quad \frac{S\sigma\psi\beta}{S\beta\psi\beta}\beta \quad \text{et} \quad \frac{S\sigma\psi\gamma}{S\gamma\psi\gamma}\gamma,$$

en sorte que le plan ABC aura pour équation

$$(1) \quad S\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}V\beta\gamma + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}V\gamma\alpha + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}V\alpha\beta\right) = S\alpha\beta\gamma.$$

Mais, α, β et γ étant trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde E, on a

$$V\beta\gamma = k\varphi\alpha$$

ou, en projetant avec α,

$$S\widehat{\alpha\beta\gamma} = k.$$

On aura donc

$$V\beta\gamma = \varphi\alpha\, S\alpha\beta\gamma,$$
$$V\gamma\alpha = \varphi\beta\, S\alpha\beta\gamma,$$
$$V\alpha\beta = \varphi\gamma\, S\alpha\beta\gamma.$$

D'après cela, l'équation (1) du plan P pourra se mettre sous la forme

$$S\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}\varphi\alpha + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}\varphi\beta + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}\varphi\gamma\right) = 1$$

ou

$$(2) \qquad S\varphi\rho\left(\frac{S\alpha\psi\alpha}{S\sigma\psi\alpha}\alpha + \frac{S\beta\psi\beta}{S\sigma\psi\beta}\beta + \frac{S\gamma\psi\gamma}{S\sigma\psi\gamma}\gamma\right) = 1.$$

Je dis maintenant que la somme

$$S\alpha\psi\alpha + S\beta\psi\beta + S\gamma\psi\gamma$$

est constante.

En effet, α, β et γ étant trois diamètres conjugués de

l'ellipsoïde, si l'on pose

$$\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha = \alpha_1,$$
$$\varphi^{\frac{1}{2}}\beta = \beta_1,$$
$$\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma = \gamma_1;$$

d'où

$$\alpha = \varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1,$$
$$\beta = \varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1,$$
$$\gamma = \varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1,$$

α_1, β_1, γ_1 seront trois orienteurs rectangulaires, et l'on aura

$$\begin{aligned} &S\alpha\psi\alpha + S\beta\psi\beta + S\gamma\beta\gamma \\ &\quad = S\alpha_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1 + S\beta_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1 + S\gamma_1\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1 = m_2, \end{aligned}$$

m_2 étant une constante ([1]).

Ceci établi, on voit immédiatement que le plan représenté par l'équation (2) passe par le point fixe F ayant pour vecteur

$$\frac{\varphi^{-1}\psi\sigma}{m_2}.$$

Si le cône Q se déplace en restant égal et parallèle au cône fixe K ayant pour équation

$$S\rho\psi\rho = 0,$$

la droite FS ne dépend que du vecteur σ, c'est-à-dire de trois paramètres arbitraires, et, par suite, elle décrit un complexe dont il est facile de trouver l'équation.

Si, en effet, υ et $V\alpha\upsilon$ sont les coordonnées de cette

---

([1]) La condition $m_2 = 0$ exprime que le cône ayant pour équation $S\rho\varphi^{-\frac{1}{2}}\psi\varphi^{-\frac{1}{2}}\rho = 0$ est équilatère.

droite [1], on aura

$$(m_2 - \varphi^{-1}\psi)\sigma = \upsilon,$$

d'où

$$\sigma = (m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon;$$

on a d'ailleurs

$$S\alpha\upsilon\sigma = 0$$

et, par suite,

$$(3) \qquad S\alpha\upsilon(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

Soient OL, OM et ON les vecteurs racines de l'équation vectorielle

$$(4) \qquad (m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\upsilon = S\upsilon,$$

on peut énoncer immédiatement les propriétés suivantes du complexe représenté par l'équation (3).

Toute droite passant par l'origine, ou parallèle à l'une des arêtes du trièdre OLMN, fait partie du complexe.

Toute droite située dans l'une des faces de ce trièdre, ou dans le plan de l'infini, fait aussi partie du complexe.

La surface singulière du complexe se compose donc des trois faces de ce trièdre et du plan de l'infini.

L'équation (4) donne d'ailleurs

$$\upsilon = S(m_2 - \varphi^{-1}\psi)\upsilon$$

ou

$$\varphi\upsilon = S(m_2\varphi - \psi)\upsilon$$

ou

$$\psi\upsilon = \frac{m_2 S - 1}{S}\varphi\upsilon.$$

et l'on voit que les vecteurs OL, OM et ON ne sont

---

[1] υ est parallèle à la direction de la droite, et α le vecteur de l'un quelconque de ses points [(voir *Mémoire sur les complexes du second ordre* (Genty, *Journal de Resal*, p. 299; 1882)].

autres que les diamètres conjugués communs de l'ellipsoïde E et du cône K.

Nous obtiendrons l'équation du cône du complexe ayant le point de vecteur ω pour sommet, rapporté à ce point pris pour origine, en remplaçant dans l'équation (3) υ par ρ et α par ω, ce qui donne

$$S\omega\rho(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}\rho = 0$$

ou

$$S\omega\rho(m_2\varphi - \psi)^{-1}\varphi\rho = 0$$

ou encore

$$S\varphi\rho(m_2\varphi - \psi)\omega(m_2\varphi - \psi)\rho = 0$$

ou enfin

$$S\varphi\rho\psi\rho(m_2\varphi - \psi)\omega = 0,$$

équation d'un cône du second ordre, qui, ainsi que cela doit être, passe par le centre de l'ellipsoïde E et contient les parallèles menées par son sommet aux diamètres conjugués communs de cet ellipsoïde et du cône K.

Cherchons maintenant la courbe G, enveloppe des droites du complexe situées dans un plan H, ayant pour équation

$$S\nu\rho = p,$$

où ν est orienteur.

Si nous remplaçons υ par $V\rho\nu$ et $V\alpha\upsilon$ par ρ dans l'équation (3), il vient

$$(5) \qquad S\rho(m_2 - \varphi^{-1}\psi)^{-1}V\rho\nu = 0.$$

C'est l'équation d'un cône quadrique R, réciproque du cône C ayant son sommet à l'origine et pour base la courbe G.

Cette courbe G est évidemment une parabole, puisque, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, l'une de ses tangentes est située tout entière à l'infini. On le reconnaît d'ailleurs directement, en remarquant que le cône R contient la perpendiculaire ν abaissée de son sommet sur le plan H.

Soient α le vecteur du foyer de cette parabole, λ et μ deux orienteurs rectangulaires situés dans son plan ; le plan mené par le vecteur α et l'un des points isotropes du plan H doit être tangent au cône C ; ou, ce qui est la même chose, la normale à ce plan, qui a pour vecteur

$$V\alpha(\lambda + i\mu),$$

doit être située sur le cône R.

Or l'équation (5) de ce cône peut s'écrire

$$S\rho\nu(m_2 - \psi\varphi^{-1})^{-1}\rho = 0$$

ou

$$S\rho\nu\Phi\rho = 0, \tag{6}$$

en posant

$$(m_2 - \psi\varphi^{-1})^{-1} = \Phi,$$

et si l'on remplace dans l'équation (6) ρ par

$$V\alpha(\lambda + i\mu),$$

on aura

$$S(\lambda + i\mu)(\Phi V\alpha\lambda + i\Phi V\alpha\mu) = 0$$

ou, en développant et égalant séparément à zéro la partie imaginaire du premier membre de l'équation,

$$S\lambda\Phi V\alpha\lambda - S\mu\Phi V\alpha\mu = 0,$$
$$S\mu\Phi V\alpha\lambda + S\lambda\Phi V\alpha\mu = 0,$$

ou enfin, en remplaçant α par ρ, et désignant selon l'habitude par Φ' la fonction conjuguée de Φ,

$$\begin{cases} S\rho(V\lambda\Phi'\lambda - V\mu\Phi'\mu) = 0, \\ S\rho(V\lambda\Phi'\mu + V\mu\Phi'\lambda) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

En joignant à ces deux équations la relation

$$\widehat{\nu\rho} = p, \tag{8}$$

on aura trois équations du premier degré pour déterminer ρ.

Les équations (7) étant indépendantes de p, la droite qu'elles représentent est le lieu des foyers des courbes du complexe situées dans les plans parallèles au plan (8).

De ces deux équations on tire

$$\begin{aligned}\rho &= k\mathrm{V}(\mathrm{V}\mu\Phi'\lambda + \mathrm{V}\lambda\Phi'\mu)(\mathrm{V}\lambda\Phi'\lambda - \mathrm{V}\mu\Phi'\mu)\\ &= k(\Phi'\lambda\,\mathrm{S}\lambda\mu\Phi'\lambda - \mu\,\mathrm{S}\mu\Phi'\lambda\Phi'\mu\\ &\qquad - \lambda\,\mathrm{S}\lambda\Phi'\lambda\Phi'\mu + \Phi'\mu\,\mathrm{S}\lambda\mu\Phi'\mu),\end{aligned}$$

ou, en désignant par m l'invariant bien connu de la fonction Φ,

$$\begin{aligned}\rho &= k[\Phi'\lambda\,\mathrm{S}\lambda\Phi\nu + \Phi'\mu\,\mathrm{S}\mu\Phi\nu - m(\lambda\,\mathrm{S}\lambda\Phi^{-1}\nu + \mu\,\mathrm{S}\mu\Phi^{-1}\nu)]\\ &= k[\Phi'(\Phi\nu - \nu\,\mathrm{S}\nu\Phi\nu) - m(\Phi^{-1}\nu - \nu\,\mathrm{S}\nu\Phi^{-1}\nu)]\\ &= k(\Phi'\mathrm{VV}\nu\Phi\nu.\nu - m\mathrm{VV}\nu\Phi^{-1}\nu.\nu).\end{aligned}$$

Si l'on porte cette valeur de ρ dans l'équation (8), il vient

$$p = k\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu,$$

d'où

$$k = \frac{p}{\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu};$$

on a donc, pour le vecteur du foyer,

$$\rho = p\,\frac{m\mathrm{V}\nu\mathrm{V}\nu\Phi^{-1}\nu - \Phi'\mathrm{V}\nu\mathrm{V}\nu\Phi\nu}{\mathrm{T}^2\mathrm{V}\nu\Phi\nu}.$$

Cherchons maintenant le lieu des foyers lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

On peut supposer que λ est l'orienteur de cette droite, et l'on obtiendra le lieu cherché en éliminant μ entre les équations (7) et les deux équations suivantes :

(9) $$\mathrm{S}\lambda\mu = 0,$$

(10) $$\mathrm{T}^2\mu = 1.$$

De la seconde des équations (7) et des équations (9) et (10), on tire

$$\mu = \frac{\mathrm{V}\lambda(\Phi\mathrm{V}\rho\lambda - \mathrm{V}\rho\Phi'\lambda)}{\mathrm{TV}\lambda(\Phi\mathrm{V}\rho\lambda - \mathrm{V}\rho\Phi'\lambda)}.$$

Portant cette valeur de μ dans la première des équations (7), il vient

$$\begin{aligned} &S\rho\lambda\Phi'\lambda T^2 V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda) \\ &\quad = S\rho V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda)\Phi' V\lambda(\Phi V\rho\lambda - V\rho\Phi'\lambda), \end{aligned}$$

équation d'un cône du troisième ordre.

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES.

(APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES);

PAR M. R. GODEFROY,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

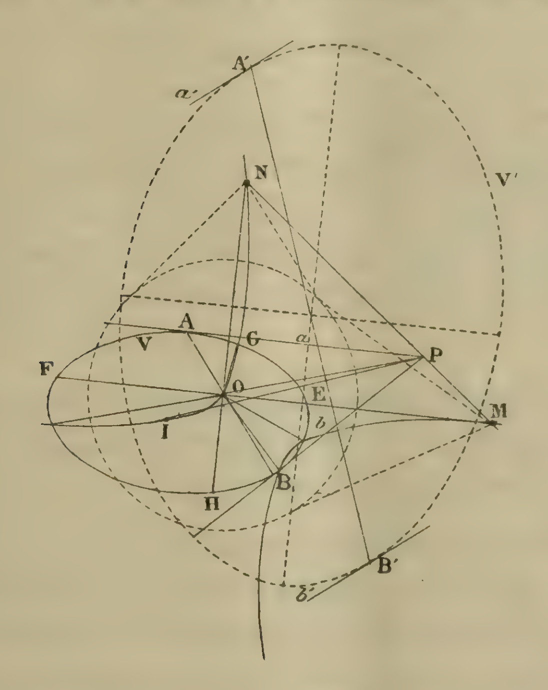
Il est question, dans ce qui suit, de diverses applications de la méthode des polaires réciproques. Nous étudierons la transformation d'une conique quelconque en prenant un cercle pour conique auxiliaire et supposant le centre du cercle d'abord en dehors du périmètre de la conique puis sur la courbe. Les résultats obtenus conduiront à d'élégants théorèmes sur les sections coniques.

I. Soient V une conique quelconque, et V′ sa polaire réciproque, le centre O du cercle auxiliaire n'étant pas sur la conique V. Nous nous proposons de chercher la solution du problème suivant :

Déterminer les points du plan de la conique V *auxquels correspondent les axes de la conique* V′.

Aux extrémités A′, B′ d'un diamètre de V′ correspondent deux tangentes a, b de V. Leurs points de contact A et B, correspondant aux tangentes parallèles a', b' de V′, sont sur une droite passant par O. Le point de

rencontre P de a, b correspond à la droite $A'B'$. Si cette droite est un axe de V', le diamètre $A'B'$ est perpendiculaire aux tangentes a', b' en ses extrémités; par suite, la droite AB sera perpendiculaire au rayon OP. Soit I le centre de la conique V; le point M correspondant à un axe de V' se trouve à l'intersection d'un diamètre



IM et d'une perpendiculaire OM, issue du point fixe O, au diamètre conjugué de IM. Le point M est par suite sur l'hyperbole d'Apollonius relative à la conique V et au point O (Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 142). Il appartient du reste à la polaire de O par rapport à V. Donc :

Les axes de la polaire réciproque d'une conique correspondent aux points où la polaire de l'origine coupe l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point.

La polaire de l'origine correspond naturellement au centre de la polaire réciproque.

Soient M et N les deux points correspondant aux axes. OM, ON sont les directions axiales de V'. Ces droites correspondent aux points à l'infini sur les axes de V'. Si E, F, G, H sont leurs points de rencontre avec V, les axes de V' sont proportionnels à

$$\frac{1}{OE}+\frac{1}{OF} \quad \text{et} \quad \frac{1}{OG}+\frac{1}{OH}.$$

Voici, en outre, quelques remarques intéressantes.

L'angle droit MON est inscrit à l'hyperbole d'Apollonius : cette hyperbole étant équilatère, il résulte du théorème de Frégier que la droite MN est parallèle à la normale en O à cette courbe. On retrouve ainsi cette propriété.

L'hyperbole d'Apollonius, relative à une conique V *et à un point* O, *a sa normale en* O *parallèle à la polaire de* O *par rapport à la conique* V.

Nous avons uniquement supposé jusqu'ici que le point O n'était pas sur la conique V; si, en particulier, il se trouve à l'extérieur du périmètre de V, les points M et N correspondant aux axes de V' sont les points d'intersection de la polaire de O avec les bissectrices des angles formés par le système des tangentes issues de O. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les polaires d'un point fixe par rapport à une série de coniques homothétiques sont divisées harmoniquement par ces courbes et leur hyperbole d'Apollonius relative au point fixe.

Considérons [1] une conique V' et un point fixe O.

---

[1] Le lecteur est prié de faire les figures relatives au reste de la Note.

Appelons P′ l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point. Elle passe par les points suivants : le point O, le centre I′ de V′, les pieds A′, B′, C′, D′ des normales à V′ issues de O et les points M′, N′ correspondant aux axes de V, polaire réciproque de V′ par rapport au point O. Dans la transformation, l'hyperbole équilatère P′ passant par l'origine correspond à une parabole P dont les tangentes issues de O sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, c'est-à-dire aux axes de V′. Les points I′, A′, B′, C′, D′, M′, N′ correspondent à d'autres tangentes de cette parabole. Ce sont, respectivement, la polaire de O par rapport à V, les tangentes à la conique V menées par les pieds de ses normales issues de O (¹) et les axes de V. On a ainsi ce théorème :

La parabole qui touche les tangentes à une conique V, *menées par les pieds des normales à cette conique issues d'un point* O, *est également tangente à la polaire du point* O, *aux axes de la conique et aux parallèles menées par le point* O *aux axes de la conique polaire réciproque de* V *par rapport à ce point.*

Cette parabole est celle dont il est question dans ce théorème de Chasles :

Si, autour d'un point pris dans le plan d'une section conique, on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, ces perpendiculaires successives enveloppent une parabole qui est tangente à la polaire du point fixe et aux tangentes à la conique menées par les pieds de ses nor-

---

(¹) D'après cette remarque : « Une conique et sa polaire réciproque par rapport à une circonférence de centre O ont les mêmes normales partant de O. » (Mannheim, *Messenger of Mathematics*, new series, n° 229 ; 1890.)

males abaissées de ce point (*Traité des sections coniques*, p. 145).

Et dans une Note de M. Mannheim : *Sur une parabole liée à une conique par certaines propriétés remarquables* (*Messenger of Mathematics*, new series, n° 231, 1890), dans laquelle sont citées, outre les axes de V et la polaire de O, cinq autres tangentes remarquables de la parabole.

Il est intéressant d'arriver par le procédé exposé ci-dessus à une partie des résultats connus, et de montrer en outre que les tangentes issues de O sont parallèles aux axes de la polaire réciproque, ce qui permet d'ajouter :

La directrice de la parabole considérée est la droite qui joint le point fixe au centre de la conique.

On pourrait, pour établir les différents résultats du commencement de cette Note, prendre comme point de départ la démonstration de M. Mannheim et opérer en sens inverse la transformation précédente.

II. Supposons maintenant que le centre O du cercle auxiliaire se trouve sur la conique V. La transformée V′ est une parabole dont l'axe est parallèle à la normale en O à V et qui est tangente aux perpendiculaires menées de O aux asymptotes de V.

Cherchons à quels éléments du système de V correspondent le foyer et la directrice de V′.

A un système de deux tangentes rectangulaires a', b' de V′ correspond un système de deux points A, B de V, tels que l'angle AOB est droit. A la directrice de V′ correspond donc le point fixe par où passe la droite AB, c'est-à-dire le point de Frégier relatif au point O de V.

Au foyer de V′, correspond la polaire du point de Frégier.

Cette transformation démontre le théorème de Frégier et indique en même temps que les propriétés de la parabole relatives au foyer et à la directrice se traduiront dans les théorèmes transformés par des propriétés des coniques quelconques relatives à un point de Frégier et à sa polaire, que nous appellerons *droite de Frégier*, pour abréger le langage.

Ajoutons que la droite à l'infini, la tangente au sommet et l'axe de V′ correspondent respectivement, dans le système de la conique V, au point O, au deuxième point d'intersection de la normale en O avec V et au pôle de cette normale.

Nous obtiendrons un élégant théorème sur la droite de Frégier, en transformant cette propriété de la parabole.

Par deux points A′, B′ *d'une parabole* H′, *on mène les rayons focaux et les parallèles à l'axe. Ces quatre droites sont tangentes à un cercle ayant pour centre le pôle* O *de* A′B′.

Prenons comme cercle auxiliaire le cercle de l'énoncé. A la parabole H′ correspond une hyperbole H passant par le point O. Aux points A′B′ correspondent les asymptotes de la courbe, aux vecteurs focaux de A′, B′ et aux parallèles à l'axe menées de ces points, correspondent respectivement les points où les asymptotes rencontrent la droite de Frégier relative au point O et la tangente à l'hyperbole en ce point. Quant au cercle, il se transforme en lui-même. Il est donc démontré que la circonférence ayant pour diamètre le segment d'une tangente à l'hyperbole compris entre les asymptotes admet comme deuxième corde d'intersection avec le système des asym-

ptotes la droite de Frégier relative à son point de contact, ce qui peut s'énoncer :

La droite de Frégier, relative à un point d'une hyperbole, passe par les projections sur les asymptotes des points où ces droites rencontrent la tangente au point considéré.

Pour une hyperbole équilatère de centre I, la droite de Frégier d'un point O de la courbe est la perpendiculaire en I à OI. Le point de Frégier est alors à l'infini sur la normale en O.

Voici une démonstration analytique fort simple du théorème énoncé ci-dessus, sous une forme un peu plus générale.

Prenons, comme axes de coordonnées, la tangente et la normale à l'hyperbole en O.

L'équation de l'hyperbole est

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0,$$

celle d'une hyperbole homothétique sera

(1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + \lambda = 0.$$

Le point de Frégier ayant pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = -\frac{2e}{a+c},$$

la droite de Frégier a pour équation

(2) $$(a-c)y - 2bx - 2e = 0.$$

Quant à la tangente, son équation est

(3) $$y = 0.$$

Par l'intersection de la conique (1) et des droites (2) et (3) passe la courbe

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey + \lambda + (a-c)y^2 - 2bxy - 2ey = 0.$$

qui n'est autre que le cercle

$$a(x^2+y^2)+\lambda=0.$$

Donc :

La tangente en un point d'une hyperbole coupe une hyperbole homothétique en deux points. La deuxième corde d'intersection de cette courbe avec le cercle ayant pour diamètre le segment compris entre ces deux points est la droite de Frégier relative au point de contact de la tangente.

On peut tirer de là une conséquence intéressante.

Une corde quelconque AB d'une hyperbole équilatère H est tangente à une hyperbole équilatère homothétique H'. Considérons le cercle décrit sur cette corde comme diamètre. Il coupe l'hyperbole H en deux nouveaux points C et D. La corde CD est la droite de Frégier relative au point de contact de AB et de H'. Cette droite passe donc au centre commun des deux courbes; par suite :

Si l'une des cordes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère est un diamètre du cercle, sa conjuguée est un diamètre de l'hyperbole.

Proposition bien connue [1].

---

[1] Voici encore à ce sujet une remarque curieuse :

Une élimination très simple conduit au théorème suivant:

Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une hyperbole équilatère et d'un cercle est le milieu de la droite des centres.

On en déduit :

Les droites qui joignent les milieux de deux cordes d'intersection conjuguées au centre de l'une des courbes sont égales et parallèles aux droites joignant les mêmes points au centre de l'autre courbe.

En particulier,

Si l'une des cordes communes est un diamètre de l'une des courbes, sa conjuguée est un diamètre de l'autre.

Prenons ce théorème sur la parabole :

Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes passe par le foyer.

Il donne par transformation :

Un triangle étant inscrit à une conique, pour tout point de la courbe il existe une conique ayant un foyer en ce point et touchant la droite de Frégier du point et les trois côtés du triangle.

Il suffit de remarquer que les projections d'un foyer d'une conique sur ses tangentes appartiennent à un cercle, pour déduire de l'énoncé précédent ce théorème :

Les projections d'un point quelconque d'une conique, sur les trois côtés d'un triangle inscrit à la courbe et sur la droite de Frégier du point, appartiennent au même cercle.

Cinq points quelconques étant sur une conique, on aura le théorème suivant :

Quatre points pris trois à trois forment quatre triangles : les quatre cercles passant respectivement par les projections d'un point quelconque sur les côtés de ces triangles se coupent en un même point.

Lequel s'obtient, du reste, par transformation directe du théorème bien connu concernant les cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère pris trois à trois.

Nous pourrions donner ici différents théorèmes sur le point et la droite de Frégier, transformés de théorèmes concernant le foyer et la directrice de la parabole, mais, ceci ne présentant aucune difficulté, il parait inutile d'insister outre mesure sur ce sujet. Nous nous bor-

nerons, pour terminer, à considérer le cas particulier de l'hyperbole équilatère.

Voici les propriétés spéciales à cette transformation supposée toujours faite dans les mêmes conditions. Les perpendiculaires issues de O aux asymptotes de l'hyperbole équilatère H sont rectangulaires ; le point O appartient à la directrice de la parabole H'; l'axe de cette courbe étant parallèle à la normale en O à H, la tangente de H en O est la directrice de la parabole. Le centre de l'hyperbole équilatère correspond à la corde de contact des deux tangentes rectangulaires de la parabole ; la perpendiculaire menée du centre I de l'hyperbole équilatère au rayon OI correspond au foyer de la parabole.

C'est cette dernière propriété que nous allons immédiatement utiliser.

On transforme, en effet, la propriété bien connue, déjà rappelée ci-dessus, du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes de la parabole, en celle-ci :

Un triangle étant inscrit à une hyperbole équilatère de centre I, *tout point* O *de la courbe est le foyer d'une conique touchant les trois côtés du triangle et la perpendiculaire en* I *à* OI.

Les projections de O sur ces tangentes appartiennent à un même cercle, mais l'une d'elles est le centre de la courbe : par conséquent,

Le cercle passant par les projections d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit passe aussi par le centre de la courbe.

Théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème sur l'hyperbole énoncé ci-dessus. On aurait pu l'en déduire immédiatement, en remarquant qu'ici la

droite de Frégier du point O n'est autre que la perpendiculaire en I à OI.

Le point de concours des hauteurs de tout triangle, inscrit à une hyperbole équilatère, étant un point de la courbe, on peut énoncer la proposition suivante :

Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Ce cas particulier n'est pas nouveau.

On aura aussi le théorème suivant :

Les quatre cercles passant respectivement par les projections de chacun des sommets d'un quadrilatère quelconque sur les côtés du triangle formé par les trois autres concourent en un même point, centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère.

En particulier :

Quatre points étant pris sur un cercle, les droites de Simpson de chacun de ces points relativement au triangle formé par les trois autres se coupent au même point.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

Par M. WORONTZOFF.

1. En désignant respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ les racines des équations

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0 \qquad (m \leqq n),$$

posons

$$s_q = x_1^q + x_2^q \ldots + x_n^q, \qquad s'_q = x'^q_1 + x'^q_2 + \ldots + x'^q_m,$$

$$A_{q-r} = -\frac{a_0}{q}\frac{ds_q}{da_r} = \sum_{k=1}^{k=n} a_0 \frac{x_k^{n+q-r-1}}{F(x_k)}$$

$$= \sum_{q-r} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}, \qquad (r \leqq q),$$

où la somme $\sum_{q-r} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = q \quad r.$$

Comme

$$(1) \quad -q a_q = a_0 s_q + a_1 s_{q-1} + \ldots + a_{q-2} s_2 + a_{q-1} s_1 \quad (q > 0),$$

$$(2) \quad a_0 A_q + a_1 A_{q-1} + \ldots + a_{q-1} A_1 + a_q A_0 = 0 \qquad (A_0 = 1),$$

$$(3) \quad q A_q = A_0 s_q + A_1 s_{q-1} + \ldots + A_{q-1} s_2 + A_{q-2} s_1 \quad [1],$$

---

[1] En posant, pour abréger,

$$s_q^{(k)} = \sum_{k=1}^{k=k} x_k^q, \qquad A_q^{(k)} = \sum_q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_k^{q_k} = \sum_{h=0}^{h=q} A_{q-h}^{(k-1)} x_k^h, \qquad u_q^{(k)} = \sum_{h=1}^{h=q} s_h^{(k)} A_{h-q}^{(k)},$$

admettons que, pour toutes les valeurs entières et positives de q, $u_q^{(k)} = q A_q^{(k)}$: on obtient alors, pour toutes les valeurs entières positives de q,

$$u_q^{(k+1)} = \sum_{h=1}^{h=q} s_h^{(k+1)} (A_0^{(k)} x_{k+1}^{q-h} + A_1^{(k)} x_{k+1}^{q-h-1} + \ldots + A_{q-h-1}^{(k)} x_{k+1} + A_{q-h}^{(k)})$$

$$= q \sum_{h=0}^{k=q} A_{q-h}^{(k)} x_{k+1}^h = q A_q^{(k+1)}.$$

Comme $u_q^{(1)} = q A_q^{(1)}$ ou $x_1^q + x_1^{q-1} x_1 + \ldots + x_1 x_1^{q-1} = q x_1^q$, q étant un entier positif quelconque, on a, pour toutes les valeurs entières positives de q,

$$u_q^{(2)} = q A_q^{(2)}, \qquad \ldots, \qquad u_q^{(n)} = q A_q^{(n)}.$$

on trouve

$$(4)\quad \begin{cases} s_q = q\sum(-1)^i \dfrac{(i-1)!\,a_0^{-i}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \\ \quad = q\sum(-1)^{i-1}\dfrac{(i-1)!\,\mathrm{A}_0^{-i}\mathrm{A}_1^{\alpha_1}\mathrm{A}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{A}_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{a_q}{a_0} = \sum\dfrac{s_1^{\sigma_1}s_2^{\sigma_2}\ldots s_q^{\sigma_q}}{(-1)^{\sigma_1}(-2)^{\sigma_2}\ldots(-q)^{\sigma_q}\sigma_1!\,\sigma_2!\ldots\sigma_q!} \\ \quad = \sum(-1)^i\dfrac{i!\,\mathrm{A}_0^{-i}\mathrm{A}_1^{\alpha_1}\mathrm{A}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{A}_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_q = \sum(-1)^i\dfrac{i!\,a_0^{-i}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots a_n!} \\ \quad = \sum\dfrac{s_1^{\sigma_1}s_2^{\sigma_2}\ldots s_q^{\sigma_q}}{1^{\sigma_1}2^{\sigma_2}\ldots q^{\sigma_q}\sigma_1!\,\sigma_2!\ldots\sigma_q!}, \end{cases}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les solutions entières positives des équations

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + q\sigma_q = q, \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = q,$$

et où $i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

En vertu des relations

$$\frac{dx_k}{da_h} = -\frac{x_k^{n-h}}{\mathrm{F}'(x_k)}, \qquad \frac{da_k}{ds_r} = -\frac{a_{k-r}}{r}, \qquad \frac{d\mathrm{A}_k}{ds_r} = \frac{\mathrm{A}_{k-r}}{r}$$
$$(k \geqq r > 0),$$

on obtient aussi

$$(7)\quad s_q = \frac{1}{(q-1)}\left(a_1\frac{ds_{q-1}}{da_0} + 2a_2\frac{ds_{q-1}}{da_1} + 3a_3\frac{ds_{q-1}}{da_2} + \ldots + na_n\frac{ds_{q-1}}{da_{n-1}}\right),$$

$$(8)\quad \begin{cases} a_q = \dfrac{1}{q}\Big[-s_1a_{q-1} + s_2\dfrac{da_{q-1}}{ds_1} + 2s_3\dfrac{da_{q-1}}{ds_2} \\ \qquad + 3s_4\dfrac{da_{q-1}}{ds_3} + \ldots + (q-1)s_q\dfrac{da_{q-1}}{ds_{q-1}}\Big], \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_q = \dfrac{1}{q}\Big[s_1\mathrm{A}_{q-1} + s_2\dfrac{d\mathrm{A}_{q-1}}{ds_1} + 2s_3\dfrac{d\mathrm{A}_{q-1}}{ds_2} \\ \qquad + 3s_4\dfrac{d\mathrm{A}_{q-1}}{ds_3} + \ldots + (q-1)s_q\dfrac{d\mathrm{A}_{q-1}}{ds_{q-1}}\Big]. \end{cases}$$

(*Nouvelles Annales*, p. 328; 1891.)

2. Prenons l'équation

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(a_n+y) &= [y+F(x'_1)][y+F(x'_2)]\ldots[y+F(x'_m)] \\ &= y^m + \frac{D^{m-1}a_n\Phi(a_n)}{1.2\ldots(m-1)}y^{m-1}+\ldots \\ &\quad + Da_n\Phi(a_n)y+\Phi(a_n) \\ &= (a_n+y)^m + C_1(a_n+y)^{m-1} \\ &\quad + C_2(a_n+y)^{m-2}+\ldots+C_{m-1}(a_n+y)+C_m=0, \end{aligned}\right.$$

où

$$C_r = \left[\frac{D^{m-r}a_n\Phi(a_n)}{1.2\ldots(m-r)}\right]a_n=0;$$

alors, d'après la formule (5), on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(a_n) &= F(x'_1)F(x'_2)\ldots F(x'_m) \\ &= \sum \frac{S_1^{\sigma_1}S_2^{\sigma_2}\ldots S_m^{\sigma_m}}{(-1)^{\sigma_1}(-2)^{\sigma_2}\ldots(-m)^{\sigma_m}\sigma_1!\,\sigma_2!\ldots\sigma_m!} \\ &\qquad (\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+m\sigma_m=m) \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(a_n) &= F(x'_1)F(x'_2)\ldots F(x'_m) \\ &= a_n^m + C_1a_n^{m-1}+C_2a_n^{m-2}+\ldots+C_{m-1}a_n+C_m, \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} C_r &= \frac{\Phi^{(m-r)}(0)}{1.2\ldots(m-r)} \\ &= \sum \frac{S'^{\sigma_1}_1 S'^{\sigma_2}_2\ldots S'^{\sigma_r}_r}{(-1)^{\sigma_1}(-2)^{\sigma_2}\ldots(-r)^{\sigma_r}\sigma_1!\,\sigma_2!\ldots\sigma_r!} \\ &\qquad (\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+r\sigma_r=r) \end{aligned}\right.$$

ou

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} S_q &= (-1)^q\sum_{k=1}^{k=m}[F(x'_k)]^q \\ &= (-1)^q\sum\frac{q!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_n!}a_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}\ldots a_n^{\alpha_n}S'_{\alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}+\ldots+n\alpha_0} \\ &\qquad (\alpha_0+\ldots+\alpha_n=q), \end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} S'_q &= (-1)^q\sum_{k=1}^{k=m}[F(x'_k)-a_n]^q \\ &= (-1)^q\sum\frac{q!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_{n-1}!}a_0^{\alpha_0}a_1^{\alpha_1}\ldots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}}S'_{\alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}+\ldots+n\alpha_0} \\ &\qquad (\alpha_0+\ldots+\alpha_{n-1}=q), \end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad S'_q = \sum_{k=1}^{k=m} x'^q_k = q \sum (-1)^i (i-1)!\,\frac{b_0^{-i} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots b_m^{\beta_m}}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_m!}$$
$$(\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = q,\quad i = \beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_m).$$

En faisant

$$m = n-1,\qquad b_0 = na_0,\qquad b_1 = (n-1)a_1,\qquad \ldots,$$
$$b_{n-2} = 2a_{n-2},\qquad b_{n-1} = a_{n-1},$$

nous pouvons appliquer les formules précédentes au calcul du discriminant de l'équation $F(x) = 0$,

$$(-1)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\frac{n^n}{a_0^{n-1}}\,F(x'_1)\,F(x'_2)\ldots F(x'_{n-1}) = \pi(x_1 - x_2)^2.$$

3. Posons

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = F_n(x),$$
$$a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x + a_{n-1} = F_{n-1}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_n(x'_1)\,F_n(x'_2)\ldots F_n(x'_m) = \Phi_n(a_n),$$
$$F_{n-1}(x'_1)\,F_{n-1}(x'_2)\ldots F_{n-1}(x'_m) = \Phi_{n-1}(a_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on connait $\Phi_{n-1}(a_{n-1})$, la valeur de $\Phi_n(a_n)$ s'en déduit immédiatement par de simples différentiations. En effet, on a

$$\Phi_n(a_n) = a_n^m + C_1 a_n^{m-1} + \ldots + C_{m-1} a_n + C_m$$

où

$$C_m = \Phi_n(0) = (-1)^m \frac{b_m}{b_0}\,\Phi_{n-1}(a_{n-1}).$$

En vertu de la relation

$$b_0 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m}} + b_1 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m+1}} + \ldots$$
$$+ b_{m-1} \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-1}} + b_m \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_n} = 0$$

ou

$$\frac{d\Phi_n(a_n)}{da_n} = -\frac{1}{b_m}\left[b_0 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m}} + b_1 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m+1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-1}}\right],$$

ou, plus généralement,

$$\frac{d^r\Phi_n(a_n)}{da_n^r} = -\frac{1}{b_m}\left[b_0 \frac{d}{da_{n-m}} \frac{d^{r-1}\Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}} + b_1 \frac{d}{da_{n-m+1}} \frac{d^{r-1}\Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{d}{da_{n-1}} \frac{d^{r-1}\Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}}\right],$$

on trouve

$$C_{m-1} = \left[\frac{d\Phi_n(a_n)}{da_n}\right]_{a_n=0} = -\frac{1}{b_m}\left(b_0 \frac{dC_m}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_m}{da_{n-m+1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dC_m}{da_{n-1}}\right),$$

$$C_{m-2} = \frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2\Phi_n(a_n)}{da_n^2}\right]_{a_n=0} = -\frac{1}{2b_m}\left(b_0 \frac{dC_{m-1}}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_{m-1}}{da_{n-m+1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dC_{m-1}}{da_{n-1}}\right),$$

. . . .,

$$C_{m-r} = \frac{1}{1.2\ldots r}\left[\frac{d^r\Phi_n(a_n)}{da_n^r}\right]_{a_n=0} = -\frac{1}{rb_m}\left(b_0 \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-m+1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-1}}\right),$$

. . . .,

$$C_1 = \frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\left[\frac{d^{m-1}\Phi_n(a_n)}{da_n^{m-1}}\right]_{a_n=0} = -\frac{1}{(m-1)b_m}\left(b_0 \frac{dC_2}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_2}{da_{n-m+1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dC_2}{da_{n-1}}\right).$$

En désignant respectivement par Δ_n et Δ_{n-1} les discriminants des équations $F_n(x) = 0$, $F_{n-1}(x) = 0$, et en faisant

$$m = n-1, \quad b_0 = na_0, \quad b_1 = (n-1)a_1, \quad \ldots, \quad b_{n-2} = 2a_{n-2}, \quad b_{n-1} = a_{n-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Pi(x_1 - x_2)^2 \\ &= (-1)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{n^n}{a_0^{n-1}} (Fx'_1) F(x'_2) \ldots F(x'_{n-1}) \\ &= (-1)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{n^n}{a_0^{n-1}} (a_n^{n-1} + C_1 a_n^{n-2} + C_2 a_n^{n-3} + \ldots + C_{n-2} a_n + C_{n-1}) \\ &= C'_0 a_n^{n-1} + C'_1 a_n^{n-2} + C'_2 a_n^{n-3} + \ldots + C'_{n-2} a_n + C'_{n-1},\end{aligned}$$

où

$$C'_{n-1} = (\Delta_n)_{a_n=0} = \frac{a_{n-1}^2}{a_0^2} \Delta_{n-1},$$

et, en vertu de la relation

$$\sum_{k=1}^{k=n} (n-k+1) a_{k-1} \frac{d\Delta_n}{\partial a_k} = \sum_{k=1}^{k=n} - \frac{d\Delta_n}{\partial x_k} = 0$$

ou

$$\frac{d^r \Delta_n}{\partial a_n^r} = -\frac{1}{a_{n-1}} \sum_{k=1}^{k=n-1} (n-k+1) a_{k-1} \frac{d}{\partial a_k} \frac{d^{r-1} \Delta_n}{\partial a_n^{r-1}},$$

$$\begin{aligned}C'_{n-2} &= \left(\frac{d\Delta_n}{\partial a_n}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{a_{n-1}} \left[n a_0 \frac{dC'_{n-1}}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{dC'_{n-1}}{\partial a_2} + \ldots + 2 a_{n-2} \frac{dC'_{n-1}}{\partial a_{n-1}} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C'_{n-3} &= \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2 \Delta_n}{\partial a_n^2}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{2 a_{n-1}} \left[n a_0 \frac{dC'_{n-2}}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{dC'_{n-2}}{\partial a_2} + \ldots + 2 a_{n-2} \frac{dC'_{n-2}}{\partial a_{n-1}} \right],\end{aligned}$$

....,

$$\begin{aligned}C'_1 &= \frac{1}{1.2\ldots(n-2)} \left(\frac{d^{n-2} \Delta_n}{\partial a_n^{n-2}}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{(n-2) a_{n-1}} \left[n a_0 \frac{dC'_2}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{dC'_2}{\partial a_2} + \ldots + 2 a_{n-2} \frac{dC'_2}{\partial a_{n-1}} \right],\end{aligned}$$

$$C'_0 = (-1)^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{n^n}{a_0^{n-1}}.$$

(J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 461; 1885.)

SUR L'ORIENTATION DES SYSTÈMES DE DROITES (¹);

Par M. G. HUMBERT.

V. — Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques.

20. Soient deux coniques A et B ayant respectivement pour foyers réels les points f et f', g et g' : le lieu F des foyers des coniques inscrites dans le même quadrilatère que les coniques A et B est, d'après la théorie générale, le lieu des points M tels que les systèmes de droites Mf et Mf', Mg et Mg' aient mêmes bissectrices.

Rien n'est plus facile que d'obtenir, en partant de là, l'équation du lieu : on trouverait une cubique, passant par les points cycliques du plan, et ayant une asymptote parallèle à la droite qui joint les milieux des segments ff' et gg', c'est-à-dire les centres des coniques A et B.

Cette cubique peut être déterminée par points d'une manière très simple.

La conique A a deux foyers imaginaires, qui s'obtiennent en joignant f et f' aux points cycliques I et J, et en prenant les intersections des droites ainsi obtenues; ces deux nouveaux points, f_1 et f'_1, sont aussi sur le lieu des foyers F.

De même, si l'on joint les points f et f' aux points g et g', les droites fg et $f'g'$, fg' et $f'g$ se coupent respec-

(¹) *Voir* même Tome, p. 37.

tivement en deux nouveaux points, k et k', qui sont sur F, d'après la propriété fondamentale de ce lieu.

Il y a plus : les couples de points f_1 et f'_1, k et k' jouent le même rôle que les couples f et f' ou g et g'. La proposition est évidente pour les points f_1 et f'_1 qui sont des foyers d'une des coniques du faisceau; on peut montrer de même que k et k' sont aussi les foyers d'une de ces coniques : en effet, une conique du faisceau a un foyer en k, puisque k est sur F; le second foyer réel de cette conique est nécessairement en k', car soit k'_1 ce foyer : les systèmes de droites fg, fg' et fk, fk'_1 ont même orientation, d'après la propriété fondamentale de F; les droites fg et fk coïncidant, il en est de même de fg' et fk'_1, ce qui prouve que k'_1 est sur la droite fk'; il est également sur la droite $f'k'$ et coïncide par suite avec k'.

En d'autres termes, le lieu F peut être défini, au moyen des trois couples de points f et f', g et g', I et J, de la manière suivante : on joint deux à deux les points de deux de ces couples; on obtient, par les intersections des droites ainsi construites, un nouveau couple; en opérant de la même manière sur ce nouveau couple et sur le troisième, on obtient un cinquième couple, et l'on continue ainsi indéfiniment en combinant deux quelconques des couples obtenus; tous ces couples sont sur F. On reconnaît la construction discontinue donnée par Schröter pour les courbes du troisième ordre; les couples de points considérés sont des couples de *pôles conjugués* ou *couples steinériens*; ils jouissent de la propriété que les tangentes menées à la cubique aux deux points d'un couple se rencontrent sur la courbe.

21. On peut dire d'après cela que *le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une cubique circulaire, dont les tangentes aux points cy-*

cliques se coupent sur la courbe; ou, plus simplement, une cubique circulaire qui passe par son foyer singulier.

Réciproquement, toute cubique circulaire passant par son foyer singulier peut être considérée comme le lieu des foyers de coniques inscrites dans un quadrilatère : il suffit de prendre sur cette cubique deux couples steinériens quelconques, f et f', g et g', du même système que le couple formé par les points cycliques, et la cubique est le lieu des coniques du faisceau tangentiel déterminé par deux coniques, quelconques d'ailleurs, ayant respectivement pour foyers les points f et f', g et g'.

22. Les propositions démontrées plus haut relativement aux centres harmoniques prennent une forme assez simple si l'on observe, avec Laguerre, que le centre harmonique a de deux points f et f' par rapport à un point M est sur la circonférence passant par M, f et f', et que les points M, a, f, f' divisent harmoniquement cette circonférence.

Par un point M, *du lieu* F *des coniques inscrites dans un quadrilatère, et par les foyers f et f' de l'une quelconque de ces coniques, faisons passer un cercle et prenons, sur ce cercle, le point a, qui, avec les points* M, f, f', *divise harmoniquement la circonférence :* d'après un théorème établi plus haut, *le point a décrit un cercle tangent en* M *à la courbe* F.

On voit aisément que ce cercle passe par le point obtenu en prolongeant d'une longueur égale à elle-même la droite qui va de M au foyer singulier de la cubique.

Si la courbe F a un point double, le centre harmonique des deux points d'un même couple f et f' par

rapport à ce point double est un point fixe : d'après ce qui a été dit au n° 19, la courbe F n'aura de point double que si le faisceau de coniques qui sert à la définir contient un cercle; le point double est alors le foyer ou centre du cercle. Donc :

Si, par les foyers f et f' de l'une quelconque des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle de centre o, et par le point o, on mène une circonférence, cette circonférence passe par un second point fixe o' qui, avec les points o, f et f', la divise harmoniquement. Le segment oo' a pour milieu le foyer singulier de la cubique lieu des foyers f, f'.

La courbe F est alors ce que Quételet appelle une *focale à nœud;* une focale à nœud est, d'après ce qui précède, une cubique unicursale passant par les points cycliques et par son foyer singulier. On peut la définir aussi comme le lieu du sommet d'un angle de grandeur variable dont les côtés passent par deux points fixes f et f', et la bissectrice par un troisième point fixe o.

23. On rencontre cette courbe dans un problème assez intéressant de la Géométrie de l'espace.

Chasles a fait voir que le lieu des pieds des normales à un système de quadriques homofocales, contenues dans un plan donné P, est une focale à nœud, et nous avons démontré que le lieu des foyers des sections faites par le plan P dans les quadriques homofocales coïncide avec le lieu de Chasles. On peut d'ailleurs établir directement que le lieu des foyers est une focale à nœud, en s'appuyant sur les principes généraux énoncés au commencement de ce travail, et en déduire quelques propriétés géométriques simples.

24. Cherchons, en effet, l'équation tangentielle, dans le plan P, des coniques communes à ce plan et aux surfaces homofocales.

Il y a deux quadriques du système homofocal qui touchent une droite donnée; donc deux des coniques, dans le plan P, touchent une droite de ce plan, et l'on en conclut aisément que l'équation générale cherchée contiendra un paramètre θ au second degré. Elle sera de la forme

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0,$$

et l'on pourra supposer que les coniques $A = 0$ et $C = 0$ sont deux quelconques des coniques du système.

Or parmi ces coniques figure celle qui se compose des deux points cycliques du plan P, puisque le cercle à l'infini fait partie du système homofocal; on peut donc supposer que l'on a

$$A = u^2 + v^2,$$

et l'équation devient

$$(u^2 + v^2)\theta^2 + B\theta + C = 0.$$

Les coniques ainsi représentées sont homofocales aux coniques

$$B\theta + C = 0,$$

qui appartiennent à un même faisceau tangentiel.

Cette remarque suffit pour établir que le lieu des foyers des coniques est une cubique circulaire, passant par son foyer singulier; observons maintenant qu'une des quadriques du système homofocal touche le plan P, et, par suite, une des coniques se réduit (au point de vue tangentiel) au point de contact compté deux fois; ce point est donc un point double de la cubique, qui est dès lors une focale à nœud.

Si maintenant on désigne par f et f', g et g', les

foyers de deux des coniques, la focale à nœud peut être considérée comme le lieu des foyers des coniques tangentes aux droites fg, fg', $f'g$, $f'g'$, et, puisqu'elle a un point double, ces quatre droites doivent nécessairement toucher un cercle décrit du point double comme centre.

25. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Le lieu des foyers des sections faites dans une série de quadriques homofocales par un plan P *est une focale à nœud, dont le point double est le point de contact* o *du plan* P *avec la quadrique du système qui touche ce plan.*

Si par le point o *et les foyers* f *et* f' *de l'une des coniques d'intersection on fait passer un cercle, ce cercle passe par un second point fixe* o' *qui, avec les points* o, f *et* f', *divise harmoniquement la circonférence.*

Le segment oo' *a pour milieu le foyer singulier* Φ *de la focale; ce point* Φ *est le foyer de la parabole qui figure parmi les coniques d'intersection.*

Les quatre droites qui joignent les foyers réels de l'une des coniques d'intersection aux foyers réels d'une autre de ces coniques touchent un même cercle qui a pour centre le point o.

En particulier :

Les droites qui joignent deux à deux les points où deux coniques, focales l'une de l'autre, sont coupées par un même plan forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

VI. — Propriété des foyers des courbes appartenant a un faisceau tangentiel.

26. Nous avons démontré au n° 18, comme conséquence d'une proposition fondamentale, que le centre harmonique des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel de classe n, par rapport à un point du lieu F correspondant, reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe F.

Par des considérations d'un autre ordre, on arrive à un résultat qui complète le précédent :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des foyers réels de chacune des courbes d'un faisceau tangentiel décrit un cercle (1).

Ce théorème peut recevoir une forme plus élégante si l'on observe avec Laguerre que le centre harmonique des foyers réels d'une courbe par rapport à un point coïncide avec le centre harmonique des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à la courbe. Ainsi :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à chacune des courbes d'un même faisceau tangentiel décrit un cercle.

VII. — Extension a l'espace.

27. Il ne paraît pas possible d'introduire, pour un système de plans disposés d'une manière quelconque

---

(1) M. Franklin, dans le Mémoire cité, a démontré cette proposition que nous nous étions borné à énoncer.

dans l'espace, de notion géométrique analogue à celle de l'*orientation* d'un système de droites tracées sur un même plan; aussi nous bornerons-nous, dans ce qui suit, au cas où tous les plans considérés passent par une même droite : on peut alors étendre à l'espace, sous cette forme restreinte, un grand nombre des résultats qui précèdent et arriver ainsi à des propositions intéressantes.

On dira que deux systèmes de plans, passant tous par une même droite, D, ont même orientation lorsque les systèmes de droites obtenus en coupant les plans par un plan perpendiculaire à D ont même orientation. Cela posé, des théorèmes des nos 3, 4 et 5 résultent presque immédiatement les conséquences suivantes :

Pour qu'un système variable de n plans passant tous par une droite fixe, et dont l'équation contient algébriquement un nombre quelconque de paramètres, conserve une orientation fixe, il faut et il suffit que lorsqu'un ou plusieurs des plans du système viennent à toucher le cercle imaginaire de l'infini en un point I, *d'autres plans du système, en même nombre, touchent au même instant ce cercle en un autre point* J.

Les points I et J sont ceux où les plans normaux à la droite fixe coupent le cercle à l'infini.

Soit une famille de surfaces dont l'équation dépend algébriquement d'un nombre quelconque de paramètres : pour que l'orientation du système des plans tangents qu'on peut mener par une droite donnée, D, *à chacune de ces surfaces demeure constante, il faut et il suffit que les surfaces de la famille qui touchent un des plans isotropes passant par* D *touchent l'autre plan isotrope mené par cette droite.*

Par plan *isotrope*, nous entendons un plan tangent au cercle de l'infini.

En particulier :

Soit un faisceau tangentiel de cônes algébriques de classe n, ayant même sommet ; par une droite focale, f, de l'un d'eux, menons les n plans tangents à l'un quelconque des autres : tous les systèmes ainsi obtenus autour de la droite f ont même orientation.

Réciproquement,

Si une droite f, passant par le sommet commun des cônes, jouit de cette propriété, c'est une focale de l'un des cônes du faisceau.

Le système des plans tangents menés à un cône algébrique de classe n par une droite issue de son sommet et le système des plans qui passent par la droite et chacune des n focales réelles du cône ont même orientation. (Laguerre).

De la combinaison des deux dernières propositions résulte celle-ci :

Le lieu des focales d'un faisceau tangentiel de cônes algébriques de même sommet, déterminé par deux cônes A *et* B *de classe n, est un cône tel que si, par une de ses génératrices et les n focales de* A, *puis les n focales de* B, *on fait passer des plans, les deux systèmes de plans ainsi obtenus aient même orientation.*

En coupant les cônes considérés par une sphère ayant pour centre leur sommet commun, on établit, comme au n° 16, le théorème suivant :

Si une courbe sphérique est telle que de chacun de ses points n arcs de grand cercle soient vus sous des

angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres groupes de n arcs ayant tous leurs extrémités sur la courbe. (Darboux).

Cette courbe peut être considérée d'une infinité de façons comme le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes sphériques de classe n, et, en particulier, comme le lieu des foyers des courbes sphériques de classe n tangentes aux n^2 grands cercles qui joignent n points de la sphère à n autres points de cette surface.

Les deux systèmes de n points ainsi introduits sont les extrémités d'un même système de n arcs de grand cercle convenant à la première définition des courbes qui nous occupent, et réciproquement.

28. Il est aisé de trouver l'ordre du cône, lieu des focales des cônes de même sommet et de classe n appartenant à un faisceau tangentiel. Ces cônes sont, en effet, coupés par le plan de l'infini suivant des courbes appartenant aussi à un faisceau tangentiel, et le problème revient évidemment au suivant : étant donné un faisceau tangentiel de courbes planes de classe n et une conique (le cercle à l'infini), on mène les tangentes communes à la conique et à une quelconque des courbes du faisceau; trouver le degré du lieu engendré par les points de concours de ces tangentes deux à deux, lorsque l'on fait varier la courbe dans le faisceau.

Soient t une tangente quelconque de la conique; A la courbe du faisceau qui touche t : il est clair que les points du lieu situés sur t sont à l'intersection de cette droite avec les $2n-1$ autres tangentes communes à la conique et à la courbe A; le lieu est donc d'ordre $2n-1$.

On voit facilement que ce lieu n'a, en général, de point double que si une même courbe du faisceau touche

la conique en deux points; le point double est alors le pôle, par rapport à la conique, de la droite qui joint les deux points de contact. Donc :

Le lieu des focales des cônes d'un même faisceau tangentiel de classe n est un cône d'ordre $2n - 1$; *ce cône n'a, en général, de génératrice double que si un des cônes du faisceau est doublement tangent au cercle de l'infini.*

29. Si, au lieu d'un faisceau tangentiel de cônes ayant même sommet, on considère un faisceau tangentiel de surfaces quelconques de classe n, les résultats précédents peuvent encore se généraliser.

Il est aisé d'établir tout d'abord, comme au n° 5, que :

Si les plans tangents menés par une droite à deux surfaces de classe n forment deux systèmes de même orientation, les n plans tangents menés par cette droite à une quelconque des surfaces du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières forment encore un système de même orientation que les deux systèmes primitifs.

On en conclut, étant donné un faisceau tangentiel de surfaces, que les droites qui jouissent, par rapport aux surfaces du faisceau, de la propriété précédente, forment un *complexe*.

Il est aisé de déterminer les *cônes* et la *surface des singularités* de ce complexe.

Soit, en effet, M un point quelconque de l'espace; les cônes de sommet M circonscrits aux surfaces du faisceau forment eux-mêmes un faisceau tangentiel de classe n, et les droites du complexe issues de M sont évidemment, d'après ce qui a été dit aux n°s 27 et 28, les *focales* de ces cônes.

Les cônes du complexe sont donc des cônes de degré $2n-1$, et chacun d'eux coupe une sphère ayant son sommet pour centre suivant une des courbes remarquables rencontrées plus haut.

Pour qu'un cône du complexe, de sommet M, ait une génératrice double, il faut, en général, et il suffit dans tous les cas, qu'un cône de sommet M, circonscrit à l'une des surfaces A, du faisceau, touche deux fois le cercle de l'infini (n° 28); ou, en d'autres termes, que la sphère de rayon nul ayant M pour centre, soit bitangente à la surface A. Le point M est alors, par définition, un *foyer* de A, c'est-à-dire est situé sur une des *focales* de A, en appelant *focales* d'une surface, selon l'usage, les lignes doubles de la développable circonscrite à la surface et au cercle de l'infini.

On peut donc énoncer ce théorème :

Soit un faisceau tangentiel de surfaces de classe n : les droites qui jouissent de la propriété que l'orientation du système des n plans tangents menés par l'une d'elles à une surface du faisceau demeure fixe, quand la surface varie dans le faisceau, forment un complexe d'ordre $2n-1$.

La surface des singularités du complexe est le lieu des focales des surfaces du faisceau; les droites singulières du complexe sont les tangentes de ces focales.

Tout cône du complexe coupe une sphère ayant son sommet pour centre suivant une courbe, qui peut être considérée comme le lieu des points d'où l'on voit, sur la sphère, n arcs de grand cercle sous des angles dont la somme est un multiple de π.

Le cas particulier d'un faisceau tangentiel de quadriques est intéressant; on verrait aisément que le lieu des focales des quadriques de ce faisceau est une sur-

face du huitième ordre. Le complexe précédent est ici d'ordre trois, il coïncide avec celui que déterminent les génératrices rectilignes des quadriques homofocales à celles du faisceau; c'est donc un cas particulier du complexe formé par les génératrices des quadriques en nombre doublement infini qui touchent sept (et, par suite, huit) plans : ce complexe et sa surface des singularités sont bien connus; M. R. Sturm, en particulier, a fait, dans le Tome 70 du *Journal de Crelle,* une étude détaillée du complexe réciproque ,formé par les génératrices des quadriques qui passent par huit points.

30. Pour terminer, nous indiquerons une propriété intéressante des surfaces algébriques qui ont *toutes leurs focales à l'infini.* L'équation de ces surfaces, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est semblable à celle des courbes planes analogues, étudiées au n° 6; si

$$ux + vy + wz + p = 0$$

est l'équation du plan, l'équation des surfaces considérées est de la forme

$$(6)\qquad F_n(u, v, w) - (u^2 + v^2 + w^2) f_{n-2}(u, v, w, p) = 0;$$

où F_n et f_{n-2} sont des polynômes *homogènes* d'ordres n et $n - 2$, dont le premier ne contient que u, v, w.

Menons à la surface (6) des plans tangents par une droite quelconque, que nous pouvons supposer être l'axe Oz, puisque l'équation (6) ne change pas de forme pour une transformation rectangulaire des coordonnées. Les valeurs proportionnelles de u et v qui correspondent à ces plans tangents s'obtiennent en faisant $w = 0$ et $p = 0$ dans (6); on trouve ainsi

$$\varphi(u, v) = F_n(u, v, 0) - (u^2 + v^2) f_{n-2}(u, v, 0, 0) = 0.$$

L'orientation du système des plans tangents considérés est donnée par l'expression

$$\frac{\varphi(1, i)}{\varphi(1, -i)};$$

c'est-à-dire par

$$\frac{F_n(1, i, 0)}{F_n(1, -i, 0)};$$

elle est donc la même que celle du système des plans tangents menés par Oz à la surface

$$F_n(u, v, w) = 0,$$

qui est une courbe de la classe n située dans le plan de l'infini. Or l'orientation du système des plans tangents menés à cette courbe par la droite Oz est celle des plans tangents menés par Oz au cône de sommet O dont les génératrices s'appuient sur la courbe, et, par suite (n° 27), cette orientation est la même que celle des plans menés par Oz et par les n focales réelles du cône précédent.

La direction de ces focales est d'ailleurs indépendante du point qu'on a choisi pour sommet du cône, puisque les cônes qui passent par une même courbe à l'infini sont parallèles entre eux. En d'autres termes :

Si une surface algébrique de classe n a toutes ses focales à l'infini, l'orientation du système des n plans tangents qu'on peut lui mener par une droite quelconque de l'espace est la même que celle du système des n plans qu'on peut mener par la droite parallèlement à n directions fixes.

Les n directions fixes sont évidemment celles des n focales réelles du cône qu'on peut circonscrire à la surface à partir d'un point quelconque de l'espace.

DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME DE STEINER ET D'UN THÉORÈME DE NEWTON;

PAR M. R. GODEFROY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. Le théorème de Steiner est le suivant :

Le point de concours des hauteurs de tout triangle circonscrit à la parabole est sur la directrice.

La démonstration que nous allons en donner repose sur ces deux propositions connues :

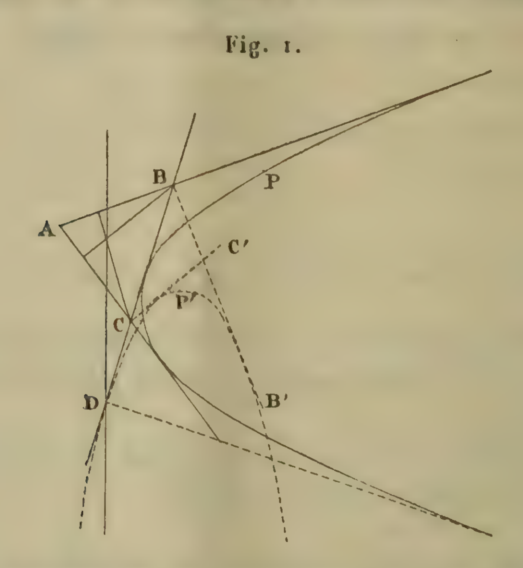
1° *Si par chaque point d'une tangente à une parabole* P, *on mène la perpendiculaire à la deuxième tangente issue de ce point, toutes ces perpendiculaires et la tangente elle-même enveloppent une parabole* P'. *Les axes de* P *et* P' *sont rectangulaires.*

2° *Un triangle étant circonscrit à une parabole, le diamètre correspondant au point de contact d'un côté et les parallèles menées de ses extrémités aux côtés opposés du triangle sont concourantes.*

Voici cette démonstration : le triangle ABC (*fig.* 1) étant circonscrit à une parabole P, la parabole P', dont il est parlé ci-dessus, qui touche les perpendiculaires BB', CC' à AB, AC est tangente à BC au point D, où la tangente de P perpendiculaire à BC rencontre cette droite. Le diamètre de P' issu de ce point, étant parallèle à l'axe de P' est perpendiculaire à l'axe de P; mais, il passe par le sommet d'un angle droit circonscrit à P : c'est donc la directrice de cette courbe. Cette droite doit

passer au point de rencontre des parallèles menées de B et C aux tangentes BB′, CC′ de P′. Ces parallèles étant deux des hauteurs du triangle ABC, il est démontré que

Fig. 1.



le point de concours des hauteurs du triangle est sur la directrice de la parabole.

Nous ne donnons ici cette démonstration qu'en raison de sa nouveauté; elle n'a pas, il faut l'avouer, une grande simplicité. Il n'en est pas de même des résultats qui suivent.

II. Ces deux théorèmes :

Le centre de toute conique inscrite à un quadrilatère est sur la droite qui joint les milieux des diagonales (Newton);

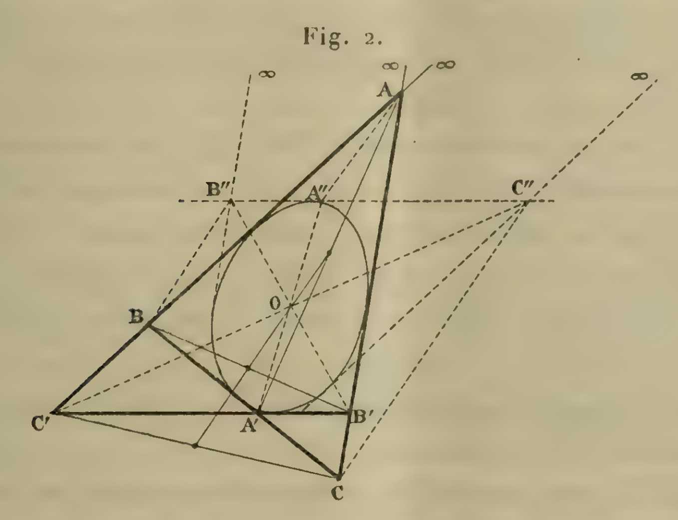
Les hauteurs de tout triangle circonscrit à la parabole se coupent sur la directrice (Steiner)

peuvent se déduire l'un de l'autre. Nous allons d'abord établir cette relation, donner ensuite du théorème de Newton une démonstration directe, et énoncer en terminant une propriété projective des sections coniques

qui aura déjà naturellement apparu parmi les résultats que nous allons d'abord obtenir.

Partons du théorème de Steiner. Nous projetons la parabole suivant une conique dont le centre O (*fig.* 2) est la projection du foyer de la parabole. La directrice se projette suivant une droite à l'infini et le triangle circonscrit à la parabole suivant le triangle ABC circonscrit

Fig. 2.



à la conique. La tangente au sommet de la parabole et la droite de l'infini de son plan se projettent respectivement suivant les tangentes parallèles A′B′C′, A″B″C″ de la conique. Les rayons focaux des points où cette tangente au sommet rencontre les côtés du triangle donnent dans la projection les droites OA′, OB′, OC′. Les hauteurs du triangle sont parallèles à ces rayons : leurs transformées seront les droites AA″, BB″, CC″ passant aux points où OA′, OB′, OC′ rencontrent la tangente A″B″C″. Les hauteurs se rencontrant sur la directrice, les droites AA″, BB″, CC″ se rencontrent sur une droite à l'infini, autrement dit, sont parallèles. Ce résultat équivaut au théorème de Newton. On en déduit, en effet (en considérant les triangles AA′A″, BB′B″, CC′C″ dans lesquels O est le milieu commun des trois côtés A′A″, B′B″, C′C″),

qu'une même droite contient le centre de la conique et les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit ABCA'B'C'.

M. John.-C. Moore a donné du théorème de Steiner une démonstration remarquable qui permet de le regarder comme une conséquence immédiate du théorème de Brianchon (voir SALMON, *Sections coniques,* Ch. XIV, p. 414). Ce procédé, ne faisant usage que de propriétés projectives, est applicable au théorème de Newton. Nous avons ainsi la démonstration suivante.

Soit le quadrilatère ABCA'B'C' (*fig.* 2) circonscrit à une conique. Les droites qui joignent chaque point de rencontre de deux côtés au point de rencontre des tangentes parallèles aux deux autres sont parallèles. Ainsi BB'', CC'' sont parallèles en vertu du théorème de Brianchon appliqué à l'hexagone ∞ BC ∞ B''C'' ∞ formé par les six tangentes issues des points B, C, B'', C''. Les trois droites BB'', CC'', $\infty\infty$ sont concourantes, autrement dit BB'', CC'' sont parallèles : même démonstration pour la droite AA'' associée à l'une des précédentes.

Ceci établi, le théorème de Newton s'en déduit de suite comme ci-dessus.

On peut même éviter d'invoquer le théorème de Brianchon, en procédant de la manière suivante.

Les droites BB'', CC'' (*fig.* 2) engendrent, lorsque B''C'' roule sur la conique, des faisceaux homographiques où trois couples sont formés de rayons parallèles (pour les positions ou B''C'' coïncide avec un côté du triangle ABC); par suite, BB'', CC'' sont parallèles, d'où se conclut immédiatement le théorème de Newton.

Ces deux dernières démonstrations, et surtout la seconde, se développent, comme on le voit, en quelques lignes : elle sont d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer.

Ce fait que les droites AA'', BB'', CC'' sont parallèles n'est en définitive qu'une forme projective spéciale du théorème de Newton. On en déduit de suite, par projection, le théorème suivant :

Deux quadrilatères $ABCA'B'C'$, $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ *étant circonscrits à une conique; si les points de rencontre des côtés homologues sont en ligne droite, cette même droite contient le point de concours des six droites* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$,

et son corrélatif que nous n'énonçons pas.

Ces deux théorèmes sont susceptibles d'être présentés sous une forme différente; on peut dire en effet :

Deux triangles homologiques étant circonscrits à une conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points où une tangente quelconque coupe les côtés correspondants de l'autre concourent sur l'axe d'homologie,

et corrélativement :

Deux triangles homologiques étant inscrits à une conique, les rayons menés d'un point quelconque de la conique aux sommets de l'un rencontrent les côtés correspondants de l'autre en trois points en ligne droite avec le centre d'homologie.

Ces théorèmes se démontrent directement, de la manière la plus simple, au moyen des théorèmes de Brianchon et de Pascal. Il n'expriment pas autre chose, du reste, que ces propriétés fondamentales, mais appliquées à des systèmes de tangentes et de points, combinés de manière à présenter à l'esprit une image différente.

APPLICATION DU CALCUL DES RÉSIDUS;

Par M. E. AMIGUES.

1. Je me propose, dans cette Note, d'étendre aux variables imaginaires une formule donnée par M. Weierstrass pour les variables réelles, et de montrer qu'avec cette formule plus générale on peut trouver les coordonnées de certains centres de gravité au moyen du calcul des résidus.

Supposons que le point qui représente une variable z décrive une courbe C. Le point qui représente la fonction

$$u = f(z)$$

décrira une courbe C′ et celui qui représente la fonction

$$v = \varphi(z)$$

décrira une courbe C″.

On appellera naturellement *points correspondants* les trois points donnés par une même valeur de z, et *éléments correspondants* trois éléments limités à chaque bout par trois points correspondants.

A chaque élément de la courbe C′ on applique un poids égal à l'élément correspondant de la courbe C″ et l'on se propose de trouver le centre de gravité d'un pareil système.

Soient x_0, y_0 les coordonnées de ce centre de gravité et soit μ une quantité ayant ce point comme affixe, de telle sorte que l'on ait

$$\mu = x_0 + y_0 i.$$

Posons

$$f(z) = P + Qi,$$

ce qui montre que P et Q sont les coordonnées du point de la courbe C′ qui correspond au point z de la courbe C. On a les deux équations suivantes

$$x_0 \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C P \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz],$$

$$y_0 \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C Q \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz];$$

multipliant la seconde équation par i et ajoutant

$$\text{(A)} \qquad \mu \int_C \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz] = \int_C f(z) \operatorname{mod}[\varphi'(z)\,dz].$$

Supposons, en particulier, que la courbe C soit un segment de l'axe des x compris entre les abscisses a et b, a étant la plus petite. Supposons aussi que la courbe C″ soit appliquée sur Ox. Supposons enfin que la quantité $\varphi'(x)$ reste positive quand x varie de a à b. Dans ces conditions

$$\operatorname{mod} dz = dx, \qquad \operatorname{mod} \varphi'(z) = \varphi'(x)$$

et la formule (A) devient la formule

$$\text{(B)} \qquad \mu \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

C'est la formule de M. Weierstrass, dont on trouvera une démonstration directe dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite.

2. Nous allons mettre la formule (A) sous une autre forme, en supposant que la courbe C et la courbe C″ soient connues, la courbe C′ demeurant arbitraire. La courbe C étant connue, la quantité

$$z = x + yi$$

est une fonction connue de t. On a donc, d'une part,

$$\operatorname{mod} dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \lambda(t)\,dt,$$

d'autre part

$$dz = dx + i\,dy = \rho(t)\,dt.$$

On en conclut

$$\frac{\operatorname{mod} dz}{dz} = \frac{\lambda(t)}{\rho(t)};$$

éliminant t entre cette équation et celle qui donne z en fonction de t, on a

$$(1) \qquad \frac{\operatorname{mod} dz}{dz} = F(z).$$

D'un autre côté, la courbe C'' est connue, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(z)$ est donnée; il en est de même de $\varphi'(z)$. Alors z est une fonction connue de t, $\varphi'(z)$ est aussi une fonction connue de t et le module de $\varphi'(z)$ également. On a donc

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) = \tau(t).$$

Éliminant t entre cette équation et celle qui donne z en fonction de t, on obtient

$$\operatorname{mod} \varphi'(z) = \psi(z).$$

La formule (A) peut alors s'écrire

$$(\text{C}) \qquad \mu \int_C \psi(z)\,F(z)\,dz = \int_C f(z)\,\psi(z)\,F(z)\,dz.$$

On voit que μ est le quotient de deux intégrales; et, si la courbe C est fermée, le quotient de deux résidus.

3. Supposons, en particulier, que l'on ait

$$\varphi(z) = z,$$

c'est-à-dire que la courbe C'' soit confondue avec la courbe C et que les points correspondants de ces deux courbes soient confondus. Supposons en outre que la variable z décrive un cercle ayant pour rayon R et pour

centre l'affixe de la quantité a. On a alors

$$\text{mod}\,\varphi'(z) = 1,$$

et, comme on a aussi

$$z - a = \text{R}\,e^{ti},$$

on obtient

$$\text{mod}\,dz = \frac{\text{R}\,dz}{i(z-a)}.$$

La formule (A) devient alors, en intégrant le long de la circonférence entière et dans le sens direct,

$$2\pi\text{R}\mu = \int_{\text{C}} \frac{\text{R}f(z)\,dz}{i(z-a)}$$

ou bien

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{C}} \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

De là le théorème suivant :

Si une variable z décrit un cercle de rayon R *et de centre a, une fonction uniforme quelconque*

$$u = f(z)$$

décrit une courbe fermée; et si à chaque élément de la courbe décrite par la fonction u on applique un poids égal à l'élément correspondant du cercle, le centre de gravité du système est l'affixe du résidu intégral de la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ par rapport au cercle.

En particulier, si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle, on a

$$\mu = f(a).$$

4. Supposons que la variable z décrive un polygone fermé dans le sens direct. Soit s la portion de périmètre qui sépare un point fixe pris sur ce périmètre et un point de coordonnées x et y mobile sur ce périmètre; cette

longueur s étant regardée comme positive dans le sens direct.

Soit dès lors AB un côté du polygone, le sens AB étant le sens direct et soit α l'angle trigonométrique de Ox avec AB. x et y étant les coordonnées d'un point de AB, on a, en grandeur et en signe, AB étant le sens positif du segment ds,

$$dx = ds \cos\alpha,$$

$$dy = ds \sin\alpha\,;$$

on en conclut

$$dz = dx + i\,dy = ds\, e^{\alpha i}.$$

Considérons maintenant une fonction uniforme quelconque

$$u = f(z)$$

Le point u décrit un polygone à côtés curvilignes. A chaque élément de ce polygone curviligne appliquons le poids de l'élément correspondant du polygone rectiligne et cherchons le centre de gravité.

Nous aurons pour le côté AB

$$\mu \int_{AB} e^{-\alpha i}\, dz = \int_{AB} e^{-\alpha i} f(z)\, dz$$

et, en simplifiant,

$$\mu \int_{AB} dz = \int_{AB} f(z)\, dz,$$

μ étant le centre de gravité de l'arc qui correspond à AB.

Écrivant les égalités analogues pour les autres côtés et ajoutant, on a

$$\mu \int_{AB} dz + \mu' \int_{BC} dz + \ldots = \int_{P} f(z)\, dz,$$

l'intégrale du second membre étant prise tout le long du polygone.

En appelant l, l', l'', ... les longueurs des côtés AB, BC, ... du polygone et α, α', α'', ... les angles de Ox avec ces côtés, on peut écrire

$$\mu l e^{\alpha i} + \mu' l' e^{\alpha' i} + \mu'' l'' e^{\alpha'' i} + \ldots = \int_P f(z)\,dz;$$

si le polygone est un parallélogramme, la formule devient

$$\text{(D)} \qquad (\mu - \mu'') l e^{\alpha i} + (\mu' - \mu''') l' e^{\alpha' i} = \int_P f(z)\,dz;$$

si la fonction $f(z)$ est doublement périodique et que l'on prenne le parallélogramme des périodes, on voit que chaque côté donne une courbe fermée, que deux côtés opposés donnent la même courbe tracée dans l'ordre inverse et ayant chaque fois le même centre de gravité, c'est-à-dire que l'on a $\mu'' = \mu$ et $\mu''' = \mu'$. Le premier membre de la formule (D) est alors nul, ce qui est conforme au principe signalé par M. Hermite.

5. Le cas le plus intéressant serait celui où l'on aurait

$$\varphi(z) = f(z).$$

La formule (A) deviendrait alors

$$\mu \int_C \operatorname{mod}[f'(z)\,dz] = \int_C f(z) \operatorname{mod}[f'(z)\,dz]$$

et donnerait le centre de gravité de la courbe C' *supposée homogène*. Mais dans ce cas on ne peut exprimer $\operatorname{mod} f'(z)$ en fonction de z que si l'on se donne $f'(z)$ et par suite $f(z)$. On ne peut donc avoir que des résultats particuliers et non des théorèmes généraux. Nous signalerons les deux exemples suivants.

La variable z décrit un arc de cercle de centre a et

de rayon R. Trouver le centre de gravité de la courbe homogène décrite par la fonction

$$u = A(z - a)^p + B.$$

(Cette dernière courbe est aussi un arc de cercle et l'on arrivera facilement au résultat connu.)

Même question pour la fonction

$$u = Ae^{mz} + B.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre adressée à M. Rouché.

Je me permettrai de vous soumettre quelques remarques sur le curieux article de M. Lemoine, relatif à la simplicité des constructions. Il semble donner prise à une grave objection.

Supposons que dans une épure, où la direction des lignes de rappel est connue, on en ait à tracer 22 : c'est une opération qui demande environ deux minutes. Appliquons les conventions et les résultats de M. Lemoine. La simplicité (je dirais plutôt, ce me semble, la complication) du tracé d'une parallèle étant représentée par 9, celle de notre construction serait 9×22, ou 198. Elle serait donc supérieure à celle du tracé des huit cercles tangents à trois cercles donnés, par la méthode de M. Mannheim. Il résulte de cet exemple que les conclusions de M. Lemoine, très intéressantes au point de vue *théorique* spécial qu'il a choisi, ne correspondent pas à la complication plus ou moins grande des tracés dans le sens que l'on donne à ce mot en pratique.

La raison de cette différence, c'est que M. Lemoine ne fait aucun usage de l'équerre; or, si elle ne doit pas être employée à la construction des perpendiculaires, elle s'applique d'une façon très simple et très exacte à celle des parallèles. Pour rétablir la concordance, il semble qu'il faudrait ajouter aux opérations élémentaires les deux suivantes : 1° appliquer la règle contre l'équerre; 2° faire passer le bord de l'équerre par un point donné. L'opération de tracer la ligne suivant le bord de l'équerre ne diffère pas de l'opération analogue pour la règle; il n'y a pas lieu de lui affecter un symbole spécial.

On voit ainsi disparaître la différence énorme que M. Lemoine trouve entre la solution de Gergonne et celle de M. Mannheim, différence qui l'a, dit-il, bien surpris lui-même. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que la solution de M. Mannheim n'exige aucun tracé de parallèle, et que c'est pour ce tracé qu'il y a désaccord entre la théorie de M. Lemoine et la pratique. Ainsi, la construction classique des quatre axes de similitude a pour coefficient de complication 37; celle qui est proposée comme plus avantageuse a 42.

Il semble, en outre, que dans l'énoncé de la construction de Gergonne M. Lemoine fasse quelques constructions inutiles. Il n'est pas nécessaire de déterminer les douze pôles : il suffit d'un seul pour chaque axe, en abaissant du centre radical une perpendiculaire sur cet axe de similitude. J'ai fait un tracé dont le coefficient de complication est 200. Ce résultat placerait la solution de Gergonne bien près de celle de M. Mannheim au point de vue de la simplicité; mais, comme M. Lemoine le fait observer, quand on commence à appliquer cette méthode, on n'y apporte pas toujours toutes les simplifications possibles; il se peut donc que le chiffre de 200

doive encore être abaissé; d'autant plus que j'ai fait la construction telle qu'elle se présente, sans réfléchir longuement aux moyens de la réduire.

R. Soudée,
Professeur au lycée d'Angoulême.

Extrait d'une lettre à M. Rouché.

M. Émile Lemoine fait une discussion très intéressante de la valeur pratique des solutions de Viète, de Bobillier et Gergonne, de M. Fouché et de M. Mannheim. L'avantage reste à la méthode de M. Mannheim.

Or il est à remarquer que, au point de vue théorique, les trois dernières solutions se ramènent facilement à la même idée. Prenant la figure de M. Fouché (*Nouvelles Annales*, juin 1892, p. 235) on reconnaît qu'elle contient à la fois les trois solutions. Les couples de points que M. Lemoine appelle $a_2 a'_2$, $\alpha_2 \alpha'_2$ (p. 470) sont appelés MN, $M_1 N_1$ par M. Fouché. Au lieu de KK' on a la droite PR.

La démonstration est évidente. Partant d'un point M, M. Mannheim construit les antihomologues M' et M''; puis il prend l'antihomologue N'' de M' relativement aux cercles O' et O''.

Ainsi les deux points a_2, a'_2 de la solution de M. Mannheim ne sont autre chose que les deux points où un cercle isogonal coupe un des cercles donnés. M. Fouché indique donc précisément la construction de M. Mannheim à la fin de sa *Remarque II* (p. 237) pour le cas où l'axe de similitude, ou simplement le point H, est en dehors des limites de l'épure.

La construction de M. Fouché s'appliquant au cas d'un cercle, une droite et un point (p. 241), il me semble que l'on doit pouvoir appliquer aussi à ce cas la méthode de M. Mannheim.

Pour terminer, je vous envoie à tout hasard une solution (peut-être déjà connue) du problème d'élémentaires de l'agrégation de 1886, que j'ai trouvée de mon côté lors de la lecture de l'article de M. Fouché.

On donne un cercle et deux points P et Q sur un diamètre; on joint PA, QB et l'on demande le lieu de M qui est un cercle, Q et P étant les deux centres de similitude. On demandait comme troisième partie du problème : 3° A′ et B′ étant les deuxièmes points d'intersection des droites MA et MB, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

Or, passant par A′ et M, le cercle est isogonal du groupe correspondant au centre de similitude extrême P; passant par B′ et M, il appartient aussi au groupe du centre Q. Appartenant aux deux groupes, ce cercle coupe orthogonalement le cercle donné O, de sorte que son centre est l'intersection des tangentes en A′ et B′ au cercle O.

L'ensemble des cercles circonscrits à A′B′M est donc le faisceau des cercles coupant orthogonalement le cercle donné et le cercle lieu de M. C'est le faisceau bien connu étudié par Poncelet, composé de cercles admettant PQ comme axe radical, faisceau réciproque de celui défini par le cercle O et le cercle lieu de M. Le lieu du centre est une droite, etc.

E. Marchant,
Professeur au lycée de Versailles.

ERRATA.

Page 81, fig. 4, *lisez* A′ *au lieu de* A, B′ *au lieu de* B et inversement.

AU SUJET D'UN LIVRE RÉCENT [1] SUR AUGUSTE COMTE;

Par M. J. BERTRAND,
de l'Académie française,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

L'auteur de ce livre est un catholique convaincu; il réprouve, par conséquent, et condamne la doctrine philosophique et sociologique qui, plus qu'aucune autre, suivant lui, caractérise notre époque. Il veut, cependant, dans le récit de la vie d'Auguste Comte, aussi bien que dans l'exposé de ses idées, rester impartial jusqu'à l'indifférence. C'est un rôle difficile. Lorsque, comme le P. Gruber, on réussit à le jouer, il diminue l'intérêt du récit. Le P. Gruber est sérieux et sincère, mais il faut en avoir acquis l'assurance pour ne pas soupçonner quelquefois, dans le choix des citations, toujours exactes et textuelles, une ironie malignement cachée. Lorsque, suivant l'opinion de quelques juges très attentifs et très prévenus en sa faveur, tels que Littré, apparaissent dans la conduite et dans les idées de Comte des symptômes d'aliénation mentale, le P. Gruber rapporte, en même temps que leurs craintes et leurs tristesses, les protestations des admirateurs et des disciples constants dans leur foi. Lui-même ne dira son opinion qu'à la fin et avec une grande réserve. En rapportant, sans les discuter, les renseignements puisés aux sources les plus diverses, l'auteur ne peut manquer d'accepter plus d'une appréciation contestable. Mon seul but est ici d'en signaler quelques-unes. Ceux auxquels, dans l'histoire de leur maître, aucun détail ne semble indifférent, entendront sans doute avec satisfaction, sur quelques points de sa vie racontés par le

[1] Auguste Comte, *fondateur du positivisme, sa vie, sa doctrine,* par le R. P. Gruber, S. J. (Traduit de l'allemand par M. l'abbé Ph. Mazoyer, du clergé de Paris; précédé d'une préface par M. Ollé-Laprune, maître de conférences à l'École normale supérieure. Paris, Lethielleux, 1892.)

P. Gruber, le témoignage d'un contemporain dont les souvenirs sont précis et les informations très assurées.

La disgrâce de Comte à l'École Polytechnique a exercé sur la situation et sur le caractère du philosophe, pendant les dernières années de sa vie, une grande et triste influence. Le P. Gruber en a mal connu les véritables causes.

Après avoir rempli pendant vingt ans les fonctions de répétiteur d'Analyse, réunies, de 1837 à 1844, à la mission, très importante alors, d'examinateur d'admission, Comte, soumis, d'après les règlements, à une réélection annuelle, se vit enlever successivement ces deux fonctions, dont les émoluments formaient sa seule ressource. Les motifs allégués par le P. Gruber sont fort incomplets.

« Là encore, dit-il, sur ce terrain assez étranger à la Philosophie, ses opinions particulières lui attirent des antipathies. Le respect avec lequel il parlait des institutions du moyen âge, l'énergie qu'il mettait à condamner le criticisme rationaliste, la vivacité de ses remarques sur les défectuosités de l'enseignement des Sciences exactes, la façon dont il combattait l'anarchie intellectuelle, comme l'anarchie politique, et dont il défendait la nécessité d'un pouvoir spirituel, toutes ces choses le recommandaient mal auprès des savants qui étaient alors imbus des idées libérales. »

J'ose affirmer que l'énergie apportée par Auguste Comte à condamner le criticisme rationaliste, non plus que son admiration pour les institutions du moyen âge, n'ont joué, ni directement ni indirectement, aucun rôle dans les décisions qui ont attristé la fin de sa vie.

Le P. Gruber ajoute :

« Il avait en horreur un enseignement mathématique qui développait uniquement la Science technique sans donner aux élèves une intelligence plus approfondie, qui formait à une habileté toute mécanique en négligeant d'élever l'esprit à des conceptions plus larges, qui, enfin, oubliait complètement l'idée pour s'arrêter aux formules et aux calculs. »

Auguste Comte se croyait plus capable qu'aucun autre, et ne le cachait pas, de guider l'esprit des élèves vers des conceptions larges et élevées ; mais il connaissait mieux que personne l'enseignement de l'École Polytechnique et, particulièrement, celui des Mathématiques, auquel il était personnellement associé. Jamais le jugement qu'on vient de lire n'a été le sien.

Comte rendait hommage aux talents et à la sagacité de Poinsot, d'Ampère, de Navier, de Duhamel et de Liouville, qui, successivement, ont occupé la chaire d'Analyse. Il n'y a pas seulement exagération, mais invention complète, à laisser croire qu'il a pu les accuser d'oublier l'idée pour s'attacher aux formules et aux calculs. C'est le contraire de la vérité. Comte le savait, il ne l'a jamais contesté.

Bien loin de rencontrer de l'antipathie à l'École Polytechnique, Comte, dès son entrée dans le corps enseignant, en 1832, s'y trouva estimé et respecté. Les directeurs des études, Dulong et Coriolis, l'ont, en toute circonstance, aidé de toute leur influence. Lamé, Chasles, Savary, Babinet et Duhamel, ses anciens camarades, Poinsot, son ancien maître, siégeaient dans les conseils et rappelaient volontiers à ceux qui blâmaient ses écrits, ou qui souriaient de son orgueil, que, pendant son séjour à l'École, Auguste Comte était considéré par ses camarades et par ses maîtres comme la plus forte tête de sa promotion. Le P. Gruber, entrant dans le détail, assigne pour cause de la non-réélection de Comte aux fonctions d'examinateur d'admission la *Préface personnelle* (c'est le titre qu'il lui donnait) placée en tête du sixième Volume du cours de Philosophie positive. Comte s'y plaint « des dispositions irrationnelles et oppressives adoptées à l'École Polytechnique sous la désastreuse influence d'Arago ». Cette phrase agressive naissait d'une lutte depuis longtemps engagée, elle ne pouvait être la cause de la décision prise. La disposition irrationnelle et oppressive contre laquelle Auguste Comte n'a jamais cessé de protester était précisément la réélection annuelle des examinateurs d'admission. La cause principale de cette mesure, où Arago n'était pour rien, avait été l'indignité présumée de l'un des prédécesseurs de Comte, dont l'inamovibilité avait rendu la révocation difficile. La décision, ne pouvant avoir d'effet rétroactif, s'appliquait au nouvel élu seulement; elle avait assurément des inconvénients, mais l'inamovibilité, on en avait eu plus d'une preuve, présentait des dangers plus grands encore. La *Préface personnelle* était une sommation d'avoir à décider une fois pour toutes. Comte invitait impérieusement le conseil à ne pas le réélire si l'on n'était pas décidé à le considérer désormais comme inamovible. A cette mise en demeure s'ajoutaient des réflexions blessantes sur plusieurs membres, les uns ndifférents, les autres très favorables à sa cause. Il regrettait

que Poinsot, son ancien maître et son protecteur affectueux depuis près de trente ans, n'eût pas montré dans une élection récente un caractère digne de son talent. La composition irrationnelle du conseil était critiquée avec raillerie. N'était-il pas absurde d'y voir siéger tous les professeurs, quelle que fût leur incompétence, et il ajoutait en note : « Les maîtres de danse et d'escrime ne votent pas, ceux de français et d'allemand ont voix délibérative. » De telles attaques étaient faites intentionnellement pour amener sans retard le dénouement d'une crise, dont la menace lui enlevait pour ses travaux toute liberté d'esprit. On l'accusait de mal faire les examens. Ses amis, une partie du public, plus d'un juge compétent, Comte lui-même surtout, ne voulaient voir dans cette allégation qu'un odieux et ridicule prétexte. D'autres lui adressaient, de très bonne foi, des reproches très sérieux. C'était là la question véritable. Pour quelques membres du conseil, l'exclusion de Comte était considérée comme un devoir pénible, qu'ils hésitaient à accomplir.

Nommé examinateur en 1837, Comte se montra, pendant sa première tournée, excellent à tous égards, très patient, très attentif, très ingénieux; ses questions imprévues semblaient couler de source. Non seulement il jugeait bien, mais il savait rendre évidentes pour tous la faiblesse ou la force des esprits qu'il éprouvait. Si la question d'inamovibilité s'était posée après cette première épreuve, personne n'eût hésité à assurer pour toujours à l'École le meilleur examinateur dont on eût souvenir. Professeurs et élèves s'accordaient à lui reconnaître, au plus haut degré, les qualités d'un excellent juge. On citait même un colonel d'artillerie qui, ayant assisté aux examens dans l'une des premières villes de sa tournée, le suivit dans la ville suivante, attiré seulement par le désir de l'admirer plus longtemps. L'influence sur l'enseignement fut des plus heureuses, et, dès l'année suivante, les professeurs trouvaient dans l'étude des questions de Comte, soigneusement recueillies, d'utiles exercices pour leurs élèves. Lorsque Comte, pour la seconde fois, fut appelé à faire les examens, il y apporta la même patience, la même attention, la même bienveillance pour tous, mais malheureusement, non pas seulement le même genre de questions, mais les questions mêmes de l'année précédente, qui, connues des candidats, avaient perdu leur principal mérite. La mission de Comte fut renouvelée six fois; son

répertoire ne changea pas. Dans toutes les classes de Mathématiques spéciales, la préparation aux « colles de Comte » jouait un rôle important, et tout élève qui, après le tirage au sort qui se faisait alors entre les examinateurs, savait qu'il aurait Comte pour juge, se faisait exercer aux questions proposées comme imprévues et aux difficultés ingénieuses que leur solution faisait naître. Les petits pièges Mathématiques étaient toujours tendus avec le même art, mais les candidats, instruits à les éviter, l'étaient aussi à y tomber avec grâce pour se montrer habiles à en sortir. Comte n'ignorait pas l'existence de cet enseignement très bien organisé, dont le but avoué était de mettre sa perspicacité en défaut, mais il acceptait la lutte, se croyant certain d'y triompher. Il est véritable que, pour le tromper, il fallait de l'habileté; quelques élèves la poussaient fort loin ; on les y exerçait, et ces finesses n'étaient dignes ni de l'examinateur ni des maîtres; plus d'un candidat, dont le succès égayait ses camarades, a fait plus tard honneur à l'École et justifié le jugement favorable de Comte ; mais le genre de mérite dont il avait fait preuve n'était ni celui qu'on exigeait de lui, ni celui que l'examinateur croyait juger. D'autres, moins habiles, ou moins heureux, pour avoir mal réussi à simuler l'ignorance sur des questions soigneusement étudiées, étaient appréciés fort au-dessous de leur valeur véritable. Comte, souvent averti, n'a jamais accepté ces reproches. Plus l'opinion devenait unanime et pressante, plus il s'obstinait à la braver. Toutes les plaintes, suivant lui, s'expliquaient par la mauvaise humeur des candidats refusés et le mécontentement de leurs parents.

Un autre motif fut très sérieusement et, peut-être, justement allégué. Le P. Gruber le passe sous silence. Les collègues de Comte et ses prédécesseurs avaient presque tous publié des Ouvrages élémentaires dont l'étude s'imposait aux candidats. Comte avait autrefois flétri cet abus avec une mordante ironie; il n'ignorait pas que le désir d'éviter à l'avenir un tel inconvénient avait été pour beaucoup dans la décision prise de soumettre les examinateurs à une réélection annuelle. Il écrivit cependant un traité de Géométrie analytique et en annonça la publication. Lamé, son ancien camarade, et Chasles, toujours bienveillant pour tous, le supplièrent de ne pas donner suite à ce projet. Décidés l'un et l'autre à le protéger de toute leur influence, ils prévoyaient une opposition et

voulaient l'éviter. Ils n'obtinrent rien de lui. Comte n'avait rien promis, on ne lui avait rien imposé, sa liberté restait entière, il voulait en user. S'il se souvenait que la publication d'un traité d'Arithmétique par l'examinateur Reynaud lui avait paru un scandale, il lui semblait que celle d'un traité de Géométrie analytique par l'examinateur Auguste Comte serait un service rendu à l'Enseignement. Ceux qui avaient l'impertinence de comparer deux choses aussi dissemblables ne méritaient pas de réponse. Deux de ces collègues, d'ailleurs, avaient publié des traités de Géométrie analytique parvenus à la huitième ou à la dixième édition; pourquoi ne ferait-il pas comme eux, lorsque, sans grande présomption, il avait droit d'espérer qu'il ferait beaucoup mieux? On lui répondait qu'il s'agissait d'un principe et que l'impossibilité de l'appliquer aux examinateurs inamovibles était une raison de plus pour l'imposer sévèrement aux autres. Cet argument le mettait hors de lui.

Comte, en 1844, ne fut pas réélu examinateur. Sur quinze membres qui composaient le conseil, huit, en inscrivant sur leur bulletin de vote le nom de Wautzel, obéissaient à des motifs très divers. Les uns, cela est vrai, émus par la *Préface,* qui les insultait et les bravait, irrités par le procès intenté à son éditeur, dans lequel Comte, plaidant lui-même, redoubla la vivacité de ses attaques, étaient contre lui des adversaires décidés; mais ils étaient loin de former la majorité du conseil. Plus d'un opposant se laissa guider par les plaintes, chaque année plus nombreuses et plus vives, des professeurs mécontents. Plusieurs enfin, sans vouloir lire ni juger le traité de Géométrie analytique, y voyaient la renaissance d'un abus qu'il fallait arrêter. La destitution qui a si profondément troublé la vie de Comte est présentée par le P. Gruber comme une vengeance : s'il entend par là qu'en s'abstenant des attaques contre le conseil de l'École Polytechnique, Comte aurait aurait pu rester examinateur quelques années encore, l'assertion est plausible; mais il n'en aurait pas moins été menacé et discuté chaque année. Si Comte, au contraire, avait écouté les remarques bienveillantes, souvent répétées, sur les inconvénients de son système d'examen, excellent, admirable peut-être, pour les cent premiers élèves, mais qui, pour les milliers qui devaient suivre, donnait de plus en plus aux candidats habilement préparés un avantage injuste sur des concurrents solidement instruits; s'il avait cédé aux prières amicales de Lamé

en s'abstenant de publier son traité de Géométrie analytique, il aurait pu se livrer contre Arago aux attaques les plus vives, traiter à son aise son influence de désastreuse, se donner le plaisir d'appeler M. Dubois, de la Loire-Inférieure, maître de français, et M. Hase, maître d'allemand, faire de la chevalerie du moyen âge son idéal, vanter ou attaquer à son gré le criticisme rationaliste, s'exposer enfin, même en les aggravant, à tous les reproches allégués par le P. Gruber, sans que l'on songeât à lui opposer un concurrent. L'irritation de Comte renaissait chaque année lorsque quinze juges dont l'hésitation lui démontrait la médiocrité ou l'indignité devenaient les arbitres de sa position. Chacun d'eux, en lui donnant des avertissements et des conseils, croyait user d'un droit et remplir un devoir; toujours sur le qui-vive, Comte les recevait fort mal. Un autre souvenir lui montrait en eux des ennemis. Par suite des combinaisons qui suivirent la mort de Poisson, la chaire d'Analyse était devenue vacante en 1840. Comte, examinateur d'admission depuis 1837, répétiteur du cours depuis 1832, chargé en 1835 d'une suppléance, dont il s'était brillamment acquitté, regardait sa nomination comme un avancement mérité. Aucune hésitation ne lui semblait possible. Le célèbre géomètre Sturm posa sa candidature. La correspondance de Comte avec son ami d'enfance Valat fait paraître, plus qu'aucune autre publication, la bonté, la droiture et le désintéressement de son esprit, mais aussi l'accroissement continu de l'orgueil insensé qui devait tout perdre. En parlant à son ami de sa candidature, il dépasse toute mesure.

Parmi les griefs de Comte contre ceux qui, comme il le disait, l'ont contrecarré, un seul est réellement justifié : c'est l'indifférence pour ses talents professionnels, qu'il croyait incomparables. Les titres scientifiques de Comte, au point de vue où se plaçaient ses juges, étaient presque nuls, ceux de ses concurrents, considérables. Le résultat de la lutte, conforme à toutes les traditions de l'École, était assuré à l'avance : Sturm fut préféré. On est peiné, véritablement, de la manière dont Comte traite, dans l'intimité d'une correspondance confidentielle, il est vrai, l'excellent et consciencieux géomètre, le maître respecté de Puiseux et de Verdet. Il le nomme son indigne rival, son triste concurrent, son étrange compétiteur. Il désire que l'indignation des élèves n'aille pas jusqu'à mettre obstacle à l'enseignement de *cet homme;* il veut le voir pro-

fesser assez longtemps pour que chacun de ceux qui l'ont si aveuglément et si immoralement favorisé soit convaincu de son *incapacité radicale.* Il espère cependant que *cet homme* pourra être évincé sans le moindre trouble matériel. Il paraît, dit-il enfin, que de mémoire d'homme il n'y a pas eu à l'École Polytechnique un aussi mauvais enseignement mathématique, *même au temps de Cauchy.*

Les conseils de l'École, en retirant à Comte la position d'examinateur d'admission, appelèrent à ces fonctions un savant de grand mérite, dont la mort prématurée fut considérée, quelques années plus tard, comme une grande perte pour la Science. Ce jeune concurrent, fort innocent d'une préférence qu'il n'avait pas sollicitée, n'est pas jugé par Comte moins injustement que Sturm. Wautzel, âgé alors de trente-trois ans, était considéré comme une des gloires futures de l'École. L'admiration pour lui, dans la promotion de 1832, était au moins égale à celle que Comte inspirait à ses camarades de 1815. Esprit très vaste d'ailleurs, et fort éloigné de s'absorber dans les Mathématiques, Wautzel avait tous les droits à la sympathie comme à l'estime de Comte. Il reste à ses yeux, cependant, « un gamin sans expérience et, au fond, sans valeur ».

Comte, en toute circonstance, dédaignait ses concurrents. Il avait eu dans sa jeunesse et confié à son ami Valat le désir de devenir membre de l'Académie des Sciences ; se croyant déjà fort au-dessus d'un tel honneur, il ne le recherchait, il le dit ainsi, que pour améliorer sa position.

L'Académie, pour sujet de prix, n'avait proposé aucune question précise, se bornant à déclarer qu'elle couronnerait *le meilleur Ouvrage ou Mémoire sur les Mathématiques.*

« La seule chose, dit Comte, qui soutienne en moi un certain sentiment, bien ou mal fondé, de ma valeur, est la faiblesse que j'aperçois dans tous ceux qui pourraient concourir. » Ceux qui pouvaient concourir étaient tous les savants français ou étrangers, en exceptant seulement les membres de l'Académie des Sciences. Chacun pouvait choisir son sujet. Poncelet, revenu de Russie, écrivait alors son *Traité des propriétés projectives;* Dupin préparait les *Développements de Géométrie;* Jacobi avait commencé les études sur les fonctions elliptiques. Tous pouvaient concourir. Comte sans doute ne songeait pas à eux. Trois de ses camarades, Lamé, Duhamel et Savary, briguaient comme lui, pour l'avenir, les suffrages de

l'Institut, il ne pouvait manquer de les compter parmi les concurrents possibles : il savait que Chasles, son ancien à l'École, cultivait la Géométrie.

Tels sont les concurrents dont la faiblesse le rassurait. Le mal était déjà sans remède.

Comte, en 1848, eut le désir et l'espoir de reprendre les fonctions d'examinateur d'admission. Wautzel se retirait accablé par la maladie. Arago, alors ministre de la guerre par intérim, devait choisir son successeur sur une liste présentée par le conseil de l'École. L'un des répétiteurs du cours d'Analyse, auquel les membres les plus influents du conseil avaient promis leurs suffrages, dès qu'il connut la candidature de Comte, alla trouver Arago, qu'il savait pour lui plein d'affectueuse bienveillance, et lui demanda s'il avait contre lui des motifs d'exclusion absolue. « Pour ma part, dit-il, je m'efface devant lui, et si vous ne repoussez pas sa candidature, je ne demanderai que le second rang. — Comme ministre, répondit Arago, je dois la justice à tous, plus encore, s'il est possible, à celui qui m'a insulté. Si M. Comte est présenté par le conseil de l'École, sa nomination paraîtra le lendemain au *Moniteur*. » Arago désirait la présentation de Comte; il ne lui déplaisait pas de se montrer magnanime. Aucun de ses amis ne l'ignorait. Comte cependant ne fut pas proposé; il accusa, pour la seconde fois, le conseil de l'École de basse et servile complaisance. Je puis ajouter que, le lendemain de l'élection, le directeur des études, qui avait voté pour Comte et décidé plusieurs de ses collègues à faire comme lui, reçut une lettre dans laquelle son ancien camarade attribuait son échec aux sentiments de basse envie dont, depuis leur sortie de l'École, il l'avait toujours poursuivi. Comte ajoutait quelques paroles blessantes sur l'égoïsme précoce du jeune concurrent qui, en faisant appel, à son insu, aux sentiments généreux d'Arago, avait cru rendre sa réintégration certaine.

Quatre ans après, en 1852, on enleva à Comte sa dernière ressource. Il ne fut pas réélu répétiteur. En proposant cette mesure rigoureuse, adoptée par le conseil à une très grande majorité, le directeur des études Bommart, administrateur fort étranger aux intrigues des savants et indifférent à la Philosophie, alléguait des motifs très plausibles.

Chaque année, lorsque le professeur terminait son cours par cinq ou six leçons sur le Calcul des probabilités, Comte ces-

sait de venir à l'École. Cette prétendue science, suivant lui, reposait sur des sophismes, il refusait de concourir à son enseignement. Un autre reproche lui était adressé. Le répétiteur devait, trois fois chaque semaine, consacrer deux heures à l'interrogation de huit élèves. Comte accordait dix minutes seulement à chaque examen et souvent expédiait les huit en une heure. On lui rappela la règle; il répondit que, plus expérimenté que ses jeunes collègues, il se croyait capable, dans un temps moitié moindre, de donner une note équitable, se réservant de prolonger l'épreuve au cas où il lui resterait des doutes. C'était prêter des armes à ses ennemis et en même temps en accroître le nombre. Le sentiment qui le guidait était toujours le même, il voulait s'affranchir de toute crainte de destitution et croyait y parvenir en poussant à l'extrême les griefs allégués contre lui. Le succès obtenu dans ces conditions l'aurait rendu certain de triompher toujours. Il se trompait. Chaque année, les reproches changeaient de nature. Le gouverneur de l'École (c'était le général Bizot, homme très sage et bienveillant pour tous), lisant en tête d'une lettre d'Auguste Comte : « 4 Frédéric II, 57 », demanda l'explication de cette énigme. On lui apprit qu'il existait un calendrier positiviste. Il trouva qu'en en faisant usage dans sa correspondance officielle, le répétiteur d'Analyse manquait aux convenances. Il regrettait que ses prédécesseurs eussent introduit dans le corps enseignant un collaborateur aussi bizarre.

Comte, enfin, avait espéré que, chassé par l'indignation des élèves, Sturm serait promptement forcé de lui abandonner sa chaire. Les choses tournèrent tout autrement. Le cours de Sturm, solide et consciencieusement préparé, était de plus en plus goûté. La timidité et la gaucherie de l'excellent géomètre inspiraient la sympathie. Sans chercher jamais à se faire admirer, il se faisait toujours comprendre; ses élèves le respectaient et l'aimaient, comme leurs prédécesseurs avaient aimé et respecté Ampère. Ni l'opinion ni les sentiments de Comte n'avaient changé. Incapable de perfidie, il l'était aussi de dissimulation. Son mépris pour le talent et ses appréciations injurieuses sur le caractère du professeur qu'il devait seconder étaient connus de tous. La situation était intolérable. Une situation intolérable peut se prolonger indéfiniment, mais elle est instable. Sturm, chaque année, proposait au conseil la réélection de Comte, sans songer même qu'il fût possible de faire autre-

ment; mais, lorsque le directeur des études demanda, pour des raisons administratives, qu'il ne fût pas renommé, lorsque le général commandant l'École, qui n'avait contre Comte aucun grief personnel d'aucun genre, déclara qu'un tel maître, si excellent qu'il fût comme géomètre, lui semblait compromettant pour l'École, Sturm ne le défendit pas. La condamnation, réclamée au nom de la discipline et du bon ordre, fut presque unanime. La décision rigoureuse, qui, vue de haut et de loin, se présente comme une persécution odieuse et brutale, semblait alors aux hommes les plus sages et les plus éloignés de toute malveillance une mesure pénible, rendue inévitable par le caractère indomptable et les excentricités du fondateur du positivisme. Un amour sénile pour une jeune femme, Clotilde de Vaux, a troublé, plus encore que la pauvreté, les dernières années de Comte. Le récit de cet épisode fort vulgaire tient une grande place dans le livre du P. Gruber. J'ai connu le frère de Clotilde; il a été, comme Comte, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Comme Comte, il a compromis sa position par des publications injurieuses pour ceux qui méconnaissaient son mérite. Plusieurs amis, plus sensés que lui, ont empêché la publication qu'il voulait faire du récit des relations de Comte avec sa sœur. Admirateur et disciple d'Auguste Comte, qui l'avait reçu à l'École Polytechnique, il l'avait introduit dans sa famille. Clotilde, séparée d'un époux indigne qu'elle avait à peine connu, ne pouvait manquer d'accueillir avec une orgueilleuse reconnaissance les hommages d'un homme présenté par son frère comme le plus grand génie du siècle. Dans les lettres que Maximilien Marie voulait publier, Comte démontrait à son amie, dans un style mystique, que, sans offenser la morale positiviste, elle pouvait, quoiqu'ils fussent mariés tous les deux, quitter sa famille et vivre avec lui. Le P. Gruber, en réunissant sur l'histoire de cette passion tous les documents et tous les témoignages connus, conclut en comparant, malgré sa réserve habituelle, l'amour de Comte pour Clotilde de Vaux à la caricature du beau et du noble. L'appréciation ne paraît pas exacte. Comte était très sincère et très faible dans son rôle de vieillard amoureux. L'orgueil, malheureusement, l'a entraîné à rendre ses faiblesses et ses illusions publiques, en invitant l'Occident à les partager. Clotilde de Vaux, s'il faut en croire son frère, qui l'aimait beaucoup, était une bonne et naïve créature, d'une intelligence

ordinaire et d'un caractère faible. Sa beauté n'avait rien de remarquable. Son esprit se trouvait dépaysé dans les hautes régions où Comte voulait l'entraîner et mal à l'aise devant les désirs très pressants du grand homme qu'elle n'aurait voulu ni désespérer ni satisfaire. Après la mort de Clotilde, le désespoir de Comte, comme autrefois celui de d'Alembert lorsqu'il perdit Mlle de Lespinasse, lui inspira des pages brûlantes adressées à la mémoire de son amie et, en même temps, l'idée extravagante d'en faire une sainte, patronne du nouveau culte. L'exaltation allait-elle jusqu'à la folie ? En validant le testament de Comte, attaqué pour cause d'aliénation mentale, les tribunaux ont prononcé. Le P. Gruber approuve leur décision. « Le lecteur impartial, dit-il, pensera que la seconde période philosophique d'Auguste Comte, comme du reste le tribunal l'a prononcé, ne justifie pas l'accusation de folie porté contre le philosophe. » Il ajoute, et c'est la conclusion de son livre : « Dans la manière dont Auguste Comte s'est efforcé de réduire ses théories en pratique, il y a tant de singularités que le « sens commun » est complètement dérouté. » Entre les actes taxés de folie et les singularités qui déroutent complètement le sens commun, la ligne de séparation est mal définie. Les pensionnaires de Charenton sont nombreux ; presque tous sont plus fous qu'Auguste Comte, mais j'en ai connu qui l'étaient moins.

(*Journal des Savants.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Recueil de problèmes de Mathématiques classés par divisions scientifiques, par M. *C.-A. Laisant*, docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris ; Gauthier-Villars et fils.

Cet excellent Receuil est composé de sept Parties dont trois ont déjà paru. Les questions qu'il renferme sont extraites des principaux journaux de Mathématiques publiés en français depuis la création des *Nouvelles Annales*, qui ont d'ailleurs fourni le plus fort contingent. Aussi, loin d'être une compilation incohérente de questions banales, ce livre est en quelque

sorte un résumé clair et méthodique des principales acquisitions faites de nos jours par la Science mathématique dont il permet de suivre pas à pas et sans effort le développement successif pendant un demi-siècle. Nous ne saurions trop remercier le savant auteur d'avoir de la sorte attiré l'attention sur un grand nombre de problèmes intéressants dus aux géomètres les plus distingués, et c'est avec le plus vif plaisir que nous recommandons à nos lecteurs ce travail remarquable, qui est appelé à rendre d'éminents services aux maîtres et aux élèves pour lesquels il sera un guide sûr et précieux. E. R.

SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NÉGATIFS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université,
Professeur de Mathématiques élémentaires à Sainte-Barbe.

La plupart des mathématiciens sont aujourd'hui d'accord pour reconnaître que la différence essentielle entre l'Algèbre et l'Arithmétique consiste dans l'introduction des nombres négatifs. Cet accord paraît suffisamment prouvé par ce fait que dans le programme d'agrégation pour l'année 1893 figure pour la première fois une leçon intitulée : « Première leçon d'Algèbre. — Introduction des nombres négatifs. » Cette circonstance nous a déterminé à publier la leçon par laquelle, depuis plusieurs années, nous ouvrons notre cours d'Algèbre à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Il y a deux manières d'envisager l'introduction des nombres négatifs. La première, qui est la plus ancienne, car elle a été élucidée au XVII[e] siècle par Descartes, consiste à les considérer comme fournis par la nécessité de représenter des grandeurs comptées dans deux sens différents, tels que les segments portés sur une droite indéfinie de part et d'autre d'une origine fixe. La seconde, plus abstraite, consiste à les considérer d'emblée comme généralisation de l'idée de quantité. Cette seconde méthode fait partie de tout un ensemble de doctrines qui ont été établies dans ces dernières années par plusieurs

géomètres célèbres et qui ont conduit M. Tannery à ce résultat de haute portée philosophique que toute l'Analyse algébrique n'exige d'autre postulatum que la conception si simple du nombre entier. Ce remarquable caractère de simplicité dans le point de départ nous a fait adopter le second point de vue qui conserve à l'Analyse algébrique toute son indépendance vis-à-vis de la Géométrie et des vérités d'ordre expérimental.

Nous avons cru devoir rappeler, au début de la leçon, les principes sur lesquels doit reposer la généralisation de l'idée de quantité, quoique, à vrai dire, ces principes devraient être expliqués dès l'introduction des fractions ou, au plus tard, des nombres incommensurables, car ceux-ci appartiennent bien à l'Arithmétique et leur étude devrait, à notre sens, précéder celle des nombres négatifs. Mais la théorie des nombres incommensurables est incomparablement plus difficile que celle des nombres négatifs, et dès lors des raisons d'ordre pédagogique la font rejeter beaucoup plus loin, à tel point qu'on a cru récemment devoir la supprimer du programme d'admission à l'École Polytechnique. Malgré cela, dans la rédaction de ce qui suit, j'ai supposé cette théorie déjà faite, sans cependant y chercher aucun appui. Mon but était simplement de rédiger la leçon de telle sorte qu'on pût, sans aucun inconvénient, la placer soit avant, soit après la théorie des nombres incommensurables, et dans tous les cas, si on la place avant, profiter des résultats établis pour les appliquer sans aucune modification aux nombres incommensurables négatifs, le jour où l'on voudra faire la théorie de ces importantes quantités.

Première leçon d'Algèbre.

Introduction des nombres négatifs.

L'Algèbre a pour objet la généralisation des théories de l'Arithmétique et l'établissement de formules qui permettent de traiter d'une manière uniforme tous les problèmes de la même nature, et de règles qui s'appliquent dans tous les cas sans aucune exception. On y est arrivé par l'emploi simultané de deux procédés.

1° On représente les nombres par des lettres et les

opérations par des signes. Cette méthode, quoiqu'elle donne aux raisonnements une allure particulière, ne constitue en réalité qu'une abréviation de langage et ne saurait à elle seule distinguer l'Algèbre de l'Arithmétique.

C'est pourquoi la signification des symboles d'opérations est expliquée en Arithmétique, et l'emploi des lettres et des signes est d'un usage fréquent en Arithmétique même.

Par exemple, dire qu'*un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs*, ou écrire

$$a \times b = b \times a,$$

c'est exactement la même chose.

2° On étend le sens des opérations de l'Arithmétique et l'on applique ces opérations à des objets qui ne sont plus des nombres tels qu'on les considère en Arithmétique. C'est là ce qui distingue essentiellement l'Algèbre de l'Arithmétique. La nécessité de généraliser le sens et les objets des opérations s'introduit par la nécessité de les rendre toutes possibles, afin d'éviter les exceptions et les discussions plus ou moins pénibles qui en sont la conséquence.

La théorie de la soustraction en fournit le premier exemple.

Supposons qu'au nombre 27 nous voulions ajouter la différence 7 — 3. En Arithmétique on peut retrancher 3 de 7 et ajouter ensuite la différence à 27, ou bien on peut ajouter 7 à 27 puis retrancher 3, ou encore retrancher d'abord 3 de 27 puis ajouter 7 au résultat.

Le fait que les trois systèmes d'opérations conduisent au même résultat s'exprime par les égalités

$$27 + (7 - 3) = 27 + 7 - 3 = 27 - 3 + 7.$$

Si au contraire on veut faire la suite des opérations

$$3 + (5 - 4),$$

on pourra bien la remplacer par

$$3 + 5 - 4,$$

mais non par

$$3 - 4 + 5,$$

car la première soustraction $3 - 4$ est impossible.

On ne peut donc pas énoncer un théorème général sur l'équivalence des trois systèmes d'opérations, et les égalités

$$a + (b - c) = a + b - c = a - c + b$$

ne sont vraies qu'autant que les trois nombres a, b, c remplissent certaines conditions.

C'est pour faire disparaître les difficultés qui résultent de cette absence de généralité qu'on a inventé les nombres négatifs.

On appelle *quantité* tout ce qu'on soumet aux opérations. En Arithmétique, on ne connaît d'autres quantités que les nombres entiers, fractionnaires et incommensurables. On peut donc dire que la notion propre à l'Algèbre et qui la distingue de l'Arithmétique, c'est la généralisation plus étendue de l'idée de quantité.

Quand on généralise l'idée de quantité, les nouvelles définitions des opérations ne sont pas arbitraires. Il faut en effet réaliser les conditions suivantes :

1° Il faut que les quantités plus générales que l'on vient de définir comprennent les anciennes comme cas particuliers. Par exemple, en Arithmétique même, les fractions comprennent les nombres entiers comme cas particuliers, et les nombres incommensurables comprennent les entiers et les fractions comme cas particuliers;

2° *Principe de la permanence du sens des opérations.* — Il faut que les opérations appliquées aux nouvelles quantités reproduisent les anciennes opérations de même nom, dans le cas où les nouvelles quantités se retrouvent être les mêmes que les anciennes. Par exemple, en Arithmétique, la multiplication des fractions n'a pas le même sens que la multiplication des entiers, mais si les fractions se réduisent à des nombres entiers, la définition de la multiplication des fractions reproduit celle des nombres entiers.

Ainsi

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6}$$

et

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{2 \times 5}{1};$$

3° *Principe de la permanence des règles de calcul.* — Il faut que les nouvelles opérations jouissent des mêmes propriétés que les anciennes pour qu'on puisse leur appliquer les théorèmes de l'Arithmétique.

Propriétés des opérations. — L'étude de ces propriétés constitue la première et la plus importante partie de l'Arithmétique, mais il semble que toutes ces théories cessent d'être applicables dès qu'on n'opère plus sur les nombres considérés en Arithmétique.

Cependant les propriétés des opérations dépendent exclusivement d'un petit nombre d'entre elles que nous appellerons les *propriétés fondamentales,* de telle sorte que si une opération généralisée jouit des propriétés fondamentales de l'opération arithmétique de même nom, elle jouira aussi de toutes les autres propriétés démontrées en Arithmétique. Quand nous introduirons une nouvelle espèce de quantité, nous aurons donc seu-

lement à nous assurer que les opérations faites sur ces nouvelles quantités possèdent les propriétés fondamentales. Il convient alors de rappeler quelles sont les propriétés fondamentales des opérations. J'y joindrai la propriété fondamentale de l'égalité, quoique l'égalité ne soit pas une opération.

Propriétés fondamentales des opérations.

Égalité. — Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. Toutes les fois qu'on inventera une nouvelle espèce de quantité, il faudra en définir l'égalité, et vérifier que cette propriété s'applique à la nouvelle définition.

Addition. — Toutes les propriétés de l'addition dépendent des trois suivantes

(1) $$a + 0 = a,$$

(2) $$a + b = b + a,$$

(3) $$a + b + c = a + c + b.$$

On pourra donc appeler *addition* toute opération jouissant de ces trois propriétés, et l'addition ainsi définie jouira de toutes les propriétés de l'addition arithmétique.

Soustraction. — Elle a pour objet de trouver une quantité qui ajoutée à une quantité donnée en reproduise une autre également donnée. Elle est donc définie en même temps que l'addition et ses propriétés dépendent exclusivement de celles de l'addition. Il faudra seulement vérifier que la soustraction n'admet qu'une solution.

Multiplication. — Toutes les propriétés de la multi-

plication dépendent des cinq suivantes

$$a \times 0 = 0,$$
$$a \times 1 = a,$$
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c,$$
$$a \times b = b \times a,$$
$$a \times b \times c = a \times c \times b.$$

Si ces cinq propriétés sont vérifiées, toutes les autres le seront.

Division. — Elle a pour objet de trouver une quantité qui multipliée par une quantité donnée en reproduise une autre également donnée. Elle est définie en même temps que la multiplication et ses propriétés sont des conséquences de celles de la multiplication. Il faudra donc seulement vérifier que la division n'admet qu'une solution.

Élévation aux puissances. — C'est une suite de multiplications.

Extraction des racines. — C'est l'inverse de l'élévation aux puissances.

Nombres algébriques.

L'espèce nouvelle de quantité qu'on introduit en Algèbre est l'assemblage d'un nombre et du signe + ou — qu'on place devant, et qui jusqu'à nouvel ordre ne doit être considéré que comme un symbole de distinction et doit être provisoirement dépouillé de sa signification relative à l'addition ou à la soustraction. Nous appellerons ces quantités des *nombres algébriques*. Les nombres précédés du signe + seront dits *positifs;* ceux qui sont précédés du signe —, *négatifs*. Le nombre arithmétique qui figure dans le nombre algébrique en

est la *valeur absolue*. Ainsi $+\frac{2}{3}$ est un nombre positif dont la valeur absolue est $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$ est un nombre négatif dont la valeur absolue est $\frac{3}{4}$. Il faut comprendre parmi les nombres algébriques le nombre o qui a le signe qu'on veut et une valeur absolue nulle. Si l'on convient de faire précéder tous les nombres considérés en Arithmétique du signe $+$, on voit que les nombres algébriques comprennent les nombres arithmétiques qui deviennent les nombres positifs, ce qui vérifie la première condition générale.

Égalité. — Deux nombres algébriques sont égaux quand ils ont même valeur absolue et même signe. L'égalité ainsi définie des nombres algébriques jouit évidemment de la propriété fondamentale.

Addition. — Elle est définie par la règle suivante : 1° *Pour ajouter deux nombres de même signe on ajoute leurs valeurs absolues et l'on conserve leur signe commun.* 2° *Pour ajouter deux nombres de signes différents on retranche leurs valeurs absolues et l'on donne au résultat le signe du nombre qui avait la plus grande valeur absolue.*

Il résulte d'abord de cette règle que l'addition n'a qu'une solution et que l'addition des nombres positifs reproduit l'addition arithmétique, ce qui est la seconde condition générale.

On remarquera que la somme de deux nombres égaux en valeur absolue mais de signes contraires est o.

Il faut vérifier que les propriétés fondamentales de l'addition sont conservées

1° $$a + 0 = a.$$

Les deux membres ont évidemment même valeur ab-

solue et même signe

2° $$a + b = b + a.$$

Dans la définition on ne distingue pas l'ordre des termes. Cette deuxième propriété est donc vraie.

3° $$a + b + c = a + c + b.$$

Si l'on change le signe des trois nombres a, b, c, on change le signe de la somme $a + b$ et le signe de la somme $a + b + c$. Si l'égalité était vraie avant le changement, elle l'est donc encore après. Il peut se présenter deux cas : ou bien les trois nombres sont de même signe ou bien il y en a deux d'un certain signe et l'autre du signe contraire. D'après ce qui précède, on peut toujours supposer que le signe le plus fréquent est le signe $+$.

Si l'on désigne par α, β, γ les valeurs absolues de a, b, c, on n'aura donc à examiner que les quatre cas suivants

1° $$(+\alpha)+(+\beta)+(+\gamma)=(+\alpha)+(+\gamma)+(+\beta),$$

2° $$(+\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)=(+\alpha)+(-\gamma)+(+\beta),$$

3° $$(+\alpha)+(-\beta)+(+\gamma)=(+\alpha)+(+\gamma)+(-\beta),$$

4° $$(-\alpha)+(+\beta)+(+\gamma)=(-\alpha)+(+\gamma)+(+\beta).$$

La première égalité où tous les nombres sont positifs revient à l'Arithmétique; la troisième égalité est identique à la deuxième lue en sens inverse : elles correspondent toutes deux aux cas où les deux derniers nombres ont des signes contraires. Il suffit donc de démontrer la deuxième et la quatrième.

Je vais démontrer que

$$(+\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)=(+\alpha)+(-\gamma)+(+\beta).$$

Je suppose d'abord $\gamma < \alpha$ et $\alpha = \gamma + x$.

Le premier membre revient à

$$[+(\gamma+x)]+(+\beta)+(-\gamma),$$

qui d'après la règle donne $+(x+\beta)$.

Le deuxième membre donne aussi $+(x+\beta)$.

Maintenant je suppose $\gamma > \alpha$ et $\gamma = \alpha + x$; le premier membre revient à

$$+(\alpha+\beta)+[-(\alpha+x)],$$

c'est-à-dire

$$+(\beta-x) \quad \text{si} \quad \beta > x$$

et

$$-(x-\beta) \quad \text{si} \quad \beta < x.$$

Le deuxième devient

$$(-x)+(+\beta),$$

ce qui donne aussi

$$+(\beta-x) \quad \text{ou} \quad -(x-\beta),$$

suivant les cas.

Enfin démontrons que

$$(-\alpha)+(+\beta)+(+\gamma)=(-\alpha)+(+\gamma)+(+\beta).$$

Le premier membre peut s'écrire successivement, soit en changeant l'ordre des deux premiers termes, soit en changeant l'ordre des deux derniers quand ils sont de signe contraire, ce qui est le cas précédent.

$$\begin{aligned}
&(+\beta)+(-\alpha)+(+\gamma)\\
=&(+\beta)+(+\gamma)+(-\alpha)\\
=&(+\gamma)+(+\beta)+(-\alpha)\\
=&(+\gamma)+(-\alpha)+(+\beta)\\
=&(-\alpha)+(+\gamma)+(+\beta).
\end{aligned}$$

L'égalité est donc démontrée et les propriétés relatives à l'addition sont démontrées.

Soustraction. — Puisque l'addition est définie, la soustraction l'est aussi.

Retrancher b de a, c'est trouver un nombre c tel que $b + c = a$. Par conséquent les deux égalités

$$a - b = c \quad \text{et} \quad a = b + c$$

veulent dire la même chose par définition.

Je dis que la soustraction peut s'effectuer par la règle suivante :

Pour soustraire un nombre algébrique d'un autre, on ajoute le nombre qu'on veut retrancher après en avoir changé le signe.

En effet, soit b à retrancher de a et b' le nombre obtenu en changeant le signe de b.

D'après la règle, la différence sera

$$a + b'.$$

Il faut donc démontrer que

$$a + b' + b = 0,$$

Or

$$a + b' + b = b' + b + a \quad \text{et} \quad b' + b = 0.$$

On remarquera que la soustraction n'a qu'une solution, car, s'il y avait deux différences inégales, en leur ajoutant le deuxième terme de la soustraction, on ne retrouverait pas deux résultats égaux.

On voit aussi que, dans le cas où les deux nombres sont positifs, et le second plus petit que le premier en valeur absolue, la soustraction des nombres algébriques reproduit la soustraction arithmétique.

Multiplication. — Elle est définie par la règle suivante :

Pour multiplier deux nombres algébriques on mul-

tiplie leurs valeurs absolues et l'on donne au produit le signe + si les deux facteurs sont de même signe et le signe — si les deux facteurs sont de signes contraires.

Il peut se présenter quatre cas compris dans le Tableau suivant

$$(+\alpha)\times(+\beta)=+\alpha\beta,$$
$$(+\alpha)\times(-\beta)=-\alpha\beta,$$
$$(-\alpha)\times(+\beta)=-\alpha\beta,$$
$$(-\alpha)\times(-\beta)=+\alpha\beta.$$

On peut encore dire que le produit a le signe du multiplicande si le multiplicateur est positif, et le signe contraire à celui du multiplicande, si le multiplicateur est négatif.

On remarquera que la multiplication n'a qu'une solution et que la multiplication des nombres positifs reproduit la multiplication arithmétique.

Il faut démontrer qu'ainsi définie la multiplication jouit des propriétés fondamentales.

Ces propriétés sont

$$a\times 0=0,$$
$$a\times 1=a,$$
$$a\times b=b\times a,$$
$$a\times b\times c=a\times c\times b,$$
$$(a+b)c=ac+bc.$$

La première est évidente par définition.

Dans la deuxième le nombre 1 est positif, il convient de le remplacer par + 1. Or on a

$$a\times(+1)=a,$$

d'après la règle.

La troisième propriété est démontrée, car dans la règle on ne spécifie pas l'ordre des facteurs.

La quatrième égalité est vraie en valeur absolue.

Pour faire voir qu'elle est vraie en signe, il suffit de remarquer que d'après la règle des signes le produit de plusieurs facteurs est positif si le nombre des facteurs négatifs est nul ou pair, et négatif si le nombre des facteurs négatifs est impair. Donc le signe du produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Reste la cinquième égalité.

Si l'on change le signe de c, on change à la fois le signe du premier membre et le signe de chaque terme du second membre. On change donc aussi le signe du deuxième membre.

Donc si l'égalité est vraie avant, elle l'est encore après. On peut donc supposer c positif.

On fera la même remarque si l'on change à la fois le signe de a et le signe de b.

Si donc a et b sont de même signe, on pourra les supposer positifs et l'on retombe dans l'Arithmétique. Si a et b sont de signes contraires, je supposerai positif le plus grand en valeur absolue :

$$a = +\alpha, \qquad b = -\beta, \qquad \alpha > \beta.$$

Il faut démontrer que

$$[(+\alpha) + (-\beta)](+\gamma) = (+\alpha)(+\gamma) + (-\beta)(-\gamma);$$

le premier membre donne

$$[+(\alpha - \beta)](+\gamma)$$
$$= +(\alpha - \beta)(\gamma) = (\alpha\gamma - \beta\gamma) = +\alpha\gamma + (-\beta\gamma),$$

comme le second membre. C. Q. F. D.

Division. — La division est définie en même temps que la multiplication.

Diviser a par b, c'est trouver un nombre c tel que

$$b \times c = a,$$

les deux égalités

$$\frac{a}{b} = c \qquad \text{et} \qquad a = bc$$

veulent dire la même chose par définition.

Il en résulte que la valeur absolue du quotient multipliée par celle du diviseur doit reproduire celle du multiplicande. Elle est donc le quotient des valeurs absolues des deux termes. Quant au signe, il résulte de la règle de multiplication que, si le diviseur est positif, le quotient aura le signe du dividende, et si le diviseur est négatif, le quotient aura le signe contraire à celui du dividende.

On a donc les quatre cas

$$\frac{+\alpha}{+\beta} = +\frac{\alpha}{\beta},$$
$$\frac{+\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},$$
$$\frac{-\alpha}{+\beta} = -\frac{\alpha}{\beta},$$
$$\frac{-\alpha}{-\beta} = +\frac{\alpha}{\beta},$$

compris dans la règle suivante :

Règle. — *Pour diviser deux nombres algébriques, on divise leurs valeurs absolues et l'on donne au quotient le signe + si les deux nombres sont de même signe, le signe — si les deux nombres sont de signes contraires.*

Il résulte de ce qui précède que la division n'admet qu'une solution.

Nombres inverses. — On dit que deux nombres sont inverses quand leur produit est + 1. Ils ont donc forcé-

ment le même signe. Au lieu de diviser un nombre par un autre, on peut le multiplier par l'inverse du diviseur. Si a et a' sont inverses

$$\frac{N}{a} = N \times a',$$

car

$$Na' \times a = Naa' = N \times 1 = 1.$$

Élévation aux puissances. — C'est une suite de multiplications.

Pour élever un nombre algébrique à une puissance quelconque, on élève sa valeur absolue à cette puissance et l'on donne au résultat le signe + si le nombre donné était positif ou bien si, le nombre donné étant négatif, l'exposant est pair. On donne au résultat le signe — si le nombre donné est négatif et l'exposant impair.

Toutes les opérations que nous venons d'examiner sont toujours possibles et n'admettent qu'une solution. Il n'en est pas de même de la suivante.

Extraction des racines. — Extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a, c'est trouver un nombre x qui élevé à la puissance m reproduise a. Par conséquent les égalités

$$x = \sqrt[m]{a}$$

et

$$x^m = a$$

veulent dire la même chose.

On démontre en Arithmétique que tout nombre a une racine $m^{\text{ième}}$ et une seule. En Algèbre cette remarque détermine la valeur absolue de la racine. Il reste à déterminer le signe.

Si m est impair x^m aura le signe de x. Il faudra donc que x et a soient de même signe; tout nombre algé-

brique a donc une racine d'un ordre impair déterminé et une seule, laquelle est du même signe que lui.

Ainsi

$$\sqrt[3]{27} = 3, \qquad \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Si au contraire m est pair x^m est toujours positif quel que soit le signe de x. Si alors a est positif, il y aura deux racines égales en valeur absolue et de signe contraire; mais, si a est négatif, il n'y aura aucun nombre positif ou négatif qui soit racine $m^{\text{ième}}$ du nombre donné.

Ainsi $\sqrt[4]{16}$ est $+2$ ou -2, mais $\sqrt[4]{-16}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif. C'est une opération impossible.

Cette impossibilité est l'origine d'une nouvelle généralisation de l'idée de quantité qui a conduit à l'invention des quantités appelées *imaginaires*.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre à M. Rouché.

M. le général Dewulf, dans le numéro de février dernier des *Nouvelles Annales*, donne une ingénieuse solution de ce problème :

Construire une parabole, connaissant un de ses points M, *le centre de courbure* ω, *relatif au point* M, *et la direction de ses diamètres.*

M. Servais (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XII, p. 19) et antérieurement M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI, p. 327) ont aussi donné des solutions de cette question.

En voici encore une, des plus simples, basée sur l'intéressante question proposée par M. Rouché sous le n° 1653.

Menons par M une droite MI parallèle à la direction des diamètres, et une autre droite MD faisant avec le rayon de courbure $M\omega$ le même angle que ce rayon fait avec MI. La perpendiculaire abaissée du milieu de $M\omega$ sur MD rencontre MD en F. Le point F est le foyer de la parabole.

La parallèle menée par F à MI est l'axe de la parabole.

On est donc ramené au problème bien connu :

Construire une parabole, connaissant un de ses points M, *le foyer* F, *et l'axe de la parabole.*

On en conclut immédiatement la position de la directrice, et l'on détermine ensuite autant de points de la courbe que l'on veut, ainsi que les tangentes en ces points.

E.-N. Barisien.

SUR UN MODE DE GÉNÉRATION DES COURBES ANALLAGMATIQUES;

Par M. J. RÉVEILLE.

M. Moutard a démontré qu'une courbe anallagmatique du quatrième degré est l'enveloppe d'un cercle variable orthogonal à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique.

Je vais démontrer et généraliser ce mode de génération par la considération purement géométrique d'une figure de l'espace.

J'énoncerai d'abord la propriété suivante, qui est la conséquence immédiate d'un théorème plus général, démontré par M. Mannheim.

Toute courbe anallagmatique est la projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône.

(Cette projection stéréographique se fait, comme d'ailleurs dans tout ce qui suit, au moyen de la sphère ellemême.)

Soit A la courbe d'intersection de la sphère et du cône (S), et A′ sa projection stéréographique. Les plans tangents au cône déterminent sur la sphère des cercles (O) qui touchent A aux points où les génératrices de contact percent la sphère, et la courbe A est l'enveloppe de ces cercles.

Le sommet C du cône circonscrit à la sphère suivant un cercle O se trouve dans le plan polaire (P) du sommet du cône (S) par rapport à la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle T qui est la courbe de contact du cône circonscrit à la sphère, dont le sommet coïncide avec celui du cône (S). On sait que ce cercle est orthogonal à tous les cercles O.

Le point C est, dans le plan (P), le pôle, par rapport au cercle T, de l'intersection de ce plan avec le plan du cercle O; et, ce dernier plan étant tangent au cône (S), cette intersection est tangente à la courbe D suivant laquelle le plan (P) coupe le cône (S).

Le point C appartient donc à la polaire réciproque Δ de la courbe D, le cercle T étant le cercle directeur.

En projection stéréographique la courbe A devient la courbe anallagmatique A′; les cercles O deviennent des cercles O′ enveloppant la courbe A′, et orthogonaux au cercle T′, projection de T. Les centres des cercles O′

sont les points C' projections des points C; ils sont sur la projection Δ' de Δ; et, comme les relations de pôle et de polaire se conservent en projection, les courbes D' et Δ' projections de D et Δ sont polaires réciproques, le cercle directeur étant le cercle T'.

Si le cône (S) est du degré n, la courbe A est du degré $2n$, et, en général, aussi la courbe A'; quant à D', elle est du degré n.

On peut alors énoncer :

Une courbe anallagmatique de degré $2n$ est l'enveloppe d'un cercle variable orthogonal à un cercle fixe, et dont le centre décrit une courbe qui est la polaire réciproque d'une courbe de degré n, le cercle fixe étant le cercle directeur.

Si le cône (S) passe par le point de vue, la courbe A' est du degré $2n - 1$, la courbe D' passe alors par la projection du sommet du cône (S), c'est-à-dire par le centre T'; et l'on peut compléter l'énoncé précédent en ajoutant que, si la courbe de degré n passe par le centre du cercle fixe, l'enveloppe est une anallagmatique du degré $2n - 1$.

Si l'on fait $n = 2$, on a les anallagmatiques du troisième et du quatrième degré.

Remarquons enfin que le centre du cercle T' est la projection du sommet du cône (S). Si pour la courbe A on peut faire passer plusieurs cônes de degré n, on aura autant de cercles tels que T', c'est-à-dire autant de manières d'engendrer la courbe A'.

En particulier, si le cône est du deuxième degré, il existe en général trois autres cônes du deuxième degré passant par A; donc en tout quatre manières d'engendrer la courbe A'.

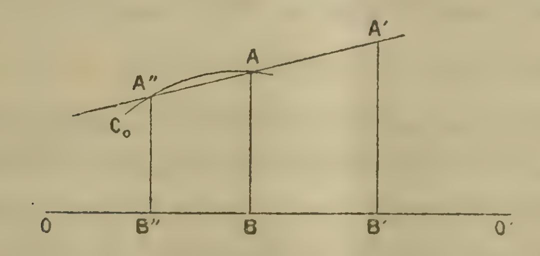
DES FIGURES HOMOTHÉTIQUES QUI ONT UNE DROITE HOMOLOGUE COMMUNE ET DONT UNE COURBE PASSE PAR UN POINT FIXE;

PAR M. J. RÉVEILLE.

J'ai étudié précédemment les figures semblables ayant un point homologue commun et dont une courbe passe par un point fixe A. Je vais remplacer maintenant ce point homologue par une droite homologue commune OO'.

Soit C_0 une position de la courbe C.

Considérons le point A comme un point de la courbe C_0; les points homologues de ce point A dans les



courbes C se trouvent sur une certaine courbe que je vais déterminer.

Le point A, considéré comme appartenant à la courbe C_0 a pour homologue A' dans la courbe C; tandis que ce même point A, appartenant à la courbe C, a pour homologue, sur la courbe C_0, le point A''.

Les deux droites A'A sont donc homologues dans les deux courbes, et, par suite, les trois points A'', A, A' sont en ligne droite.

On a de plus, en menant les ordonnées de ces

points,

$$\frac{B''B}{BB'} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Si l'on prend pour axes de coordonnées les deux droites AB et BO′; si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point de la courbe C_0, par X et Y les coordonnées du point A′, et par a la longueur AB, les relations précédentes deviennent

$$-\frac{x}{X} = \frac{y}{a} = \frac{a}{Y};$$

d'où

$$\begin{cases} y = \dfrac{a^2}{Y}, \\ x = -\dfrac{aX}{Y}. \end{cases}$$

L'équation de la courbe cherchée s'obtient donc en remplaçant, dans l'équation de la courbe C_0, x et y respectivement par $-\frac{ax}{y}$ et $\frac{a^2}{y}$.

On voit donc que la courbe Γ, lieu du point A′, et la courbe C_0 sont homologiques. Le point A est le centre d'homologie; l'axe d'homologie est la droite parallèle à OO′ qui est, de l'autre côté du point A, à une distance de OO′ égale à a; enfin, dans chaque figure, la même droite OO′ correspond à l'infini de l'autre.

On peut faire de ce qui précède des applications nombreuses. Remarquons seulement que, si C_0 est une conique, le lieu du point A′ est aussi une conique; et que, si la droite OO′ coupe la conique C_0 en deux points tels que les droites qui les joignent au point A soient parallèles aux asymptotes du cercle, le lieu est un cercle.

Enfin, il est facile de trouver le lieu d'un point quel-

conque M de la figure à laquelle appartient la courbe variable C.

En effet, ce lieu s'obtient en inclinant du même angle, et en réduisant dans une proportion convenable, mais invariable, les ordonnées du lieu du point A.

SUR LES PLANS TANGENTS A CERTAINES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Je considère une surface algébrique S, d'ordre n, représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$. On peut, d'une infinité de manières, mettre cette équation sous la forme

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières. La détermination du plan tangent T en tout point M de la surface S peut être ramenée à celle des plans polaires ϖ, ϖ' de ce point M par rapport aux deux surfaces σ, σ' qui correspondent aux équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

En effet, soient m et $m - p$ ($p \gtreqless 0$) les degrés respectifs de φ et ψ; m est égal ou supérieur à n. On voit, en formant son équation, que le plan T passe par l'intersection du plan ϖ avec le plan P qui a pour équation

$$x\frac{\partial\psi}{\partial x'} + y\frac{\partial\psi}{\partial y'} + z\frac{\partial\psi}{\partial z'} + \frac{\partial\psi}{\partial t'} + p\psi(x', y', z') = 0, \qquad (t' = 1),$$

x', y', z' étant les coordonnées de M. Or le plan P coïn-

cide avec le plan homothétique P′ de ϖ' par rapport à M, le rapport d'homothétie étant $\frac{m-p}{m}$ (si ϖ' n'est pas confondu avec P′, il doit être placé entre P′ et M).

D'après cela, si l'on sait construire géométriquement les deux plans ϖ et ϖ', on aura là un mode particulier de construction géométrique du plan tangent T.

Il peut arriver que, pour une décomposition convenable de f en une somme telle que $\varphi + \psi$, les surfaces correspondantes σ, σ' soient telles que l'on sache déterminer les plans polaires ϖ, ϖ' en partant uniquement de leur définition géométrique. Dans ce cas, on saura construire le plan T avec la règle et le compas, sans le secours d'aucun calcul. Il en serait ainsi, par exemple, à l'égard de la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$y^4 + y^2z^2 + 4z^2x^2 + x^2y^2 - 4a^2x^2 - 4b^2z^2 \\ + (3c^2 - 4a^2 - 4b^2)y^2 + 4a^2b^2 = 0,$$

où a, b, c désignent trois longueurs connues, et ceci résulte de ce que son premier membre est la somme des deux expressions

$$4(x^2+y^2-b^2)(y^2+z^2-a^2), \qquad -3y^2(x^2+y^2+z^2-c^2).$$

Il en serait également de même si la surface S était le lieu d'un point tel que ses distances à des plans donnés, ou puissances par rapport à des sphères données, fournissent un produit constant quand on les multiplie entre elles après les avoir élevées à des puissances entières positives ou négatives.

Que l'on suppose nulle la coordonnée z, et les résultats indiqués ci-dessus deviennent des conclusions relatives aux courbes planes algébriques : il suffit de remplacer, dans les énoncés, les plans et les surfaces par des droites et des courbes.

Ainsi considérons une courbe plane C faisant partie de celles qui sont constructibles par la méthode dite *des régions*, les lignes séparatrices étant supposées être des droites ou coniques dont on sache construire un point quelconque par la règle et le compas : en sorte que l'on a pu mettre son équation sous une forme

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0$$

telle que les courbes γ et γ' correspondant aux équations entières $\varphi = 0$, $\psi = 0$ soient formées uniquement par des lignes de ces deux sortes. On saura déterminer, avec la règle et le compas, les positions des deux droites polaires d'un point quelconque M de la courbe C par rapport aux courbes γ et γ' : ces deux droites feront connaître (d'après la manière correspondante à celle indiquée au sujet des surfaces) la tangente à la courbe C, au point M [1].

---

[1] J'indique ici, en axes rectangulaires, quelques exemples simples de courbes algébriques C dont les tangentes peuvent être construites géométriquement par ce procédé :

$$x^5 + a(x^2 + y^2 - b^2)^2 = 0,$$
$$(x^2 \pm y^2)^2 + a^2 x^3 y^3 = 0,$$
$$x(x - \alpha)(y^2 - b^2) - y(y - \beta)(x^2 - a^2) = 0,$$
$$x(y - \beta)(y^2 - b^2) - y(x - \alpha)(x^2 - a^2) = 0,$$
$$x^q(x^2 + y^2 - a^2)^r = y^q(x^2 + y^2 - b^2)^r,$$
$$(x^2 + y^2 + ax)^q(x^2 + y^2 + by)^r = \alpha^{2q+2r-q'-r'} x^{q'} y^{r'};$$

a, b, α, β désignent des longueurs connues et q, r', q', r des nombres entiers positifs donnés. Ces équations ont la forme même qui se prête à l'application de la méthode, et l'on voit de suite, dans chaque exemple, quelles sont les courbes γ, γ', et quelle est la valeur du rapport $\frac{m-p}{m}$ du degré de γ' à celui de γ.

Dans tous ces exemples, les courbes γ et γ' sont formées de droites ou cercles que l'on sait immédiatement tracer, de sorte que les constructions à effectuer n'exigeront aucun calcul préparatoire, si l'on se reporte à la définition géométrique de la droite polaire.

Un exemple remarquable des courbes C auxquelles ce procédé s'applique est celui d'une courbe U, d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$. Supposons que l'on connaisse géométriquement les $n-1$ tangentes de la courbe U en ce point, ainsi que ses n directions asymptotiques. Nous prendrons pour la courbe γ le système des parallèles à ces directions, menées par le point multiple : la courbe γ' sera formée des $n-1$ tangentes précédentes, et nous saurons ici, sans recourir à aucun calcul, tracer la tangente en un point quelconque de la courbe U, par l'emploi de la règle et du compas.

N.-I. LOBATCHEFFSKY.

Le 10/22 octobre 1893 aura lieu le centenaire de la naissance de l'illustre géomètre russe Lobatcheffsky.

Nicolas Lobatcheffsky appartient incontestablement au nombre des savants du XIXe siècle qui non seulement ont enrichi la Science, mais lui ont même ouvert de nouvelles voies.

Les hommes de génie qui ouvrent à la Science de nouvelles voies sont souvent obligés de réfuter les propositions qu'on avait avant eux respectées comme une vérité incontestable.

Le même rôle honorable dans la Science échut à Nicolas Ivanowitch Lobatcheffsky, « ce Copernic de la Géométrie », comme l'a appelé Clifford.

Depuis qu'Euclide a fondé l'édifice immortel de sa Géométrie sur un petit nombre de définitions, d'axiomes et des *postulata* admis sans démonstration, la vérité de ces fondements de la Géométrie ne fut soumise à aucun

doute; tous les efforts des savants de tous les pays et de toutes les époques ont été dirigés à la réduction du nombre de ces axiomes et de ces *postulata* au minimum; la Science présente, par exemple, toute une série de tentatives pour la déduction du *postulatum* d'Euclide sur la rencontre de la perpendiculaire et de l'oblique comme un corollaire mathématique des autres définitions, axiomes et *postulata;* la vérité du *postulatum* lui-même ne fut soumise à aucun doute.

Lobatcheffsky fut le premier qui ait découvert là un problème qui ne peut être résolu qu'au moyen de l'expérience; arrivé à la conviction que l'admission du *postulatum* d'Euclide est équivalente à l'admission de certaines propriétés de notre espace, qui ne peuvent être contrôlées qu'au moyen de l'expérience ou de l'observation, il a montré la possibilité de la Géométrie sans le *postulatum* d'Euclide. Lobatcheffsky a réalisé sa pensée dans une série de Mémoires, avec l'esprit de suite et l'exactitude « d'un vrai géomètre », comme l'a qualifié Gauss.

Ce *princeps mathematicorum* a fait honneur aux travaux de Lobatcheffsky dès 1846; mais cette approbation a passé inaperçue dans le monde mathématique et il a fallu encore un quart de siècle pour que le grand mérite scientifique et philosophique des travaux de Lobatcheffsky fût unanimement reconnu. Cet aveu fut le fruit des travaux de plusieurs géomètres éminents de notre époque, qui ont éclairci que la Géométrie de Lobatcheffsky pour les deux dimensions est équivalente à la Géométrie sur une surface ayant la courbure constante et négative et que la Géométrie pour les trois dimensions introduit dans la Science la notion d'une nouvelle variété, l'espace ayant une courbure.

L'étude de la Géométrie de Lobatcheffsky ou de la Géo-

métrie non euclidienne forme une nouvelle branche de la Science mathématique ayant une grande littérature.

A ces études se rattachent, en formant leur continuation immédiate, les recherches dans la Géométrie des hyperespaces; ces travaux, en jetant une vive lumière sur plusieurs questions de la Géométrie, sont en même temps un auxiliaire qu'on ne saurait remplacer dans l'étude de plusieurs questions difficiles de l'Analyse.

A une haute valeur scientifique des découvertes de Lobatcheffsky correspond une valeur philosophique tout aussi importante : d'un côté elles offrent à la spéculation une nouvelle question de l'étude des propriétés de l'espace; de l'autre elles jettent une vive lumière sur la question de l'origine de nos axiomes géométriques et ont en conséquence une haute valeur pour la théorie de la connaissance.

L'Université impériale de Kasan a eu la gloire d'avoir Lobatcheffsky au nombre de ses élèves et de ses membres; ici Lobatcheffsky a rempli les fonctions de professeur de 1812 à 1846 et celles de recteur de 1827 à 1846. Ce n'est pas seulement à cause de ses mérites de savant et de professeur que Lobatcheffsky est cher à l'Université de Kasan. L'histoire de la vie et des travaux de Lobatcheffsky, dit son biographe, est inséparablement liée à celle de notre Université; il a été le premier de ses élèves qui devint professeur. L'Université de Kasan lui doit une dette de reconnaissance pour la construction de ses meilleurs édifices et pour l'organisation de la bibliothèque.

En vue de ces mérites, la Société physico-mathématique de Kasan ne pouvait se dispenser de célébrer dignement l'anniversaire du jour de naissance du grand

mathématicien russe. Ladite Société ayant L'AUGUSTE autorisation à la souscription qui a pour but de rassembler un fonds portant le nom de Lobatcheffsky s'adresse maintenant aux savants de tous les pays, aux nombreux amis de la Science, en les priant de vouloir bien prendre part à cette souscription.

Conformément au montant de la somme rassemblée, ladite Société se propose de fonder un prix au nom de Lobatcheffsky pour les travaux mathématiques (spécialement pour ceux qui ont trait aux investigations de Lobatcheffsky) ou bien de lui ériger un buste dans l'édifice de l'Université.

Si cette proposition trouve l'accueil qu'elle a le droit d'attendre, la Société physico-mathématique tâchera de réaliser les deux buts et l'Université de Kasan sera embellie par l'image de l'homme qui l'a fait briller d'une gloire immortelle et les jeunes savants qui consacreront leurs labeurs à la Science aimée de Lobatcheffsky trouveront dans le prix de son nom le secours et l'encouragement.

Président de la Société physico-mathématique, A. WASSILIEFF, professeur de Mathématiques à l'Université de Kasan.

Vice-président de la Société physico-mathématique, T. SOUVOROFF, professeur de Mathématiques à l'Université de Kasan.

On prie d'envoyer les souscriptions à l'adresse suivante :

Kasan. Société physico-mathématique.

TRANSFORMATION OMALOÏDALE DES QUADRIQUES;

PAR M. P. MICHEL,
Lieutenant du Génie.

I. — TRANSFORMATION DE L'ELLIPSOÏDE.

1° *Définitions et résultats.*

1. Les surfaces *omaloïdes* ont été étudiées par Sylvester (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI), et par Cremona (*Rendiconti del reale Istituto lombardo*, mai 1871). Après eux, M. Picart les a aussi considérées dans sa Thèse de Mathématiques (1877), où il les désigne sous le nom de surfaces *unicursales*.

Je rappellerai brièvement la définition élémentaire de ces surfaces :

Si l'on suppose qu'un point (x, y, z) quelconque d'une surface Σ puisse être représenté par les formules

$$(1) \qquad x = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \qquad y = \frac{\varphi_2}{\varphi}, \qquad z = \frac{\varphi_3}{\varphi},$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des fonctions entières de deux lettres t et θ, et qu'inversement on puisse déduire des formules précédentes,

$$(2) \qquad t = \frac{\psi_1}{\psi}, \qquad \theta = \frac{\psi_2}{\psi},$$

ψ, ψ_1 et ψ_2 étant des fonctions entières des lettres x, y, z, on dira que Σ est une surface *omaloïde*.

Les surfaces omaloïdes jouissent de la propriété de pouvoir être représentées point par point sur un plan.

En effet, si l'on imagine dans un plan deux axes ωt

et $\omega\theta$, les formules (1) montrent qu'à tout point (t, θ) du plan correspond un point (x, y, z) de la surface; inversement, les formules (2) indiquent qu'à un point (x, y, z) de la surface ne correspond qu'un seul point (t, θ) du plan considéré.

2. M. de Longchamps, dans son *Journal de Mathématiques spéciales* (1884), a montré que les quadriques à centre sont des surfaces omaloïdes; que l'on peut représenter les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{2t}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{2\theta}{1 + t^2 + \theta^2},$$

d'où l'on déduit les formules inverses

$$t = \frac{ay}{b(a + x)}, \qquad \theta = \frac{az}{c(a + x)}.$$

De même un point de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

peut être représenté par les formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + t\theta}{1 - t\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t - \theta}{1 - t\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{t + \theta}{1 + t\theta},$$

desquelles on déduit

$$t = \frac{a(bz + cy)}{bc(a + x)}, \qquad \theta = \frac{a(bz - cy)}{bc(a + x)}.$$

Enfin, pour l'hyperboloïde à deux nappes, les for-

mules analogues sont

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{2\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t}{\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{1 + t^2 + \theta^2}{2\theta}.$$

M. de Longchamps a considéré principalement l'ellipsoïde dans son Étude. Il a montré qu'à la droite de l'infini du plan $t\omega\theta$ correspond le sommet A′ de l'ellipsoïde, qu'il a appelé *point central* de la transformation omaloïdale.

Il a fait voir qu'une transformation homographique permet de prendre pour *point central* de la transformation omaloïdale un point quelconque de la surface de l'ellipsoïde.

Les résultats principaux qu'il a énoncés sont les suivants :

1° *A toute droite du plan* $t\omega\theta$ *correspond une ellipse tracée sur l'ellipsoïde et passant par le sommet* A′.

2° *Si la droite du plan* $t\omega\theta$ *passe à l'origine* ω, *l'ellipse correspondante passe aux deux sommets* A *et* A′.

3° *A tout cercle du plan* $t\omega\theta$ *correspond une ellipse tracée sur l'ellipsoïde.*

4° *A deux droites parallèles du plan* $t\omega\theta$ *correspondent deux ellipses dont les plans ont pour traces, sur* YOZ, *deux droites parallèles.*

5° *A deux droites rectangulaires du plan* $t\omega\theta$ *correspondent deux ellipses dont les plans coupent* YOZ *suivant deux droites ayant des directions conjuguées, relativement à l'ellipse principale située dans ce plan.*

Le plan $t\omega\theta$ est appelé le *plan fondamental* de la transformation.

3. Je me propose de poursuivre cette étude; je ferai d'abord la remarque suivante :

A toute courbe C tracée sur l'ellipsoïde correspond une courbe Γ du plan fondamental.

La tangente en un point (t, θ) de la courbe Γ correspondra à une ellipse tracée sur l'ellipsoïde, passant par le sommet A′ et tangente à la courbe C au point (x, y, z) qui correspond au point (t, θ) du plan fondamental.

4. J'établirai aussi la propriété suivante :

Si l'on considère n points du plan fondamental (t_1, θ_1), (t_2, θ_2), ..., (t_n, θ_n), à chacun de ces points correspond un point de l'ellipsoïde dont les coordonnées sont données par les formules

$$x = a\frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad z = \frac{2c\theta}{1 + t^2 + \theta^2}.$$

Je joins les n points de l'ellipsoïde au sommet A′; les équations des droites ainsi déterminées seront respectivement

$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_1} = \frac{z}{c\theta_1},$$
$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_2} = \frac{z}{c\theta_2},$$
$$\dots\dots\dots,$$
$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_n} = \frac{z}{c\theta_n}.$$

Ces droites rencontrent le plan YOZ en des points ayant pour coordonnées

$$y = bt_1, \quad y = bt_2, \quad \dots, \quad y = bt_n,$$
$$z = c\theta_1, \quad z = c\theta_2, \quad \dots, \quad z = c\theta_n.$$

Si l'on prend le centre des moyennes distances des n points du plan fondamental

$$t = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}, \qquad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{n},$$

et qu'on joigne le point correspondant de l'ellipsoïde au sommet A′, on déterminera ainsi une droite qui rencontrera le plan YOZ en un point ayant pour coordonnées

$$y = b\,\frac{t_1 + t_3 + \ldots + t_n}{n}, \qquad z = c\,\frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n}{n},$$

et l'on voit que ce point est le centre des moyennes distances des n points qu'on a précédemment déterminés de la même manière sur le plan YOZ.

En particulier, si les n points du plan fondamental sont en ligne droite, les points correspondants de l'ellipsoïde sont sur une ellipse passant au sommet A′, et les points du plan YOZ sont, par conséquent, en ligne droite; la propriété établie plus haut s'applique, dans ce cas, et elle nous sera utile dans la suite de cette étude.

2° *Quartiques coniques.*

1. Je considère une conique du plan fondamental, ayant pour équation

$$(1) \qquad A t^2 + 2 B t \theta + C \theta^2 + 2 D t + 2 E \theta + F = 0,$$

et je cherche quelle est la courbe située sur l'ellipsoïde qui lui correspond; je remplace pour cela t et θ par leurs valeurs

$$t = \frac{a y}{b(a + x)}, \qquad \theta = \frac{a z}{c(a + x)},$$

et il vient après réduction

$$(2) \qquad \begin{cases} F\left(1 + \dfrac{x}{a}\right)^2 + A\,\dfrac{y^2}{b^2} + C\,\dfrac{z^2}{c^2} + 2B\,\dfrac{y}{b}\,\dfrac{z}{c} \\ \qquad\qquad + 2\left(1 + \dfrac{x}{a}\right)\left(E\,\dfrac{z}{c} + D\,\dfrac{y}{b}\right) = 0. \end{cases}$$

Cette équation représente un cône du second ordre ayant son sommet au point A′$(-a, 0, 0)$ de l'ellip-

soïde; la courbe d'intersection des deux surfaces est une quartique gauche.

Donc :

Toute conique du plan fondamental correspond à une quartique gauche, intersection de l'ellipsoïde par un cône du second ordre ayant son sommet au point central de la transformation omaloïdale.

Inversement, si dans l'équation (2) d'un cône ayant son sommet en A′ on remplace x, y et z par leurs valeurs

$$x = a\,\frac{1 - t^2 - \theta^2}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1 + t^2 + \theta^2}, \qquad z = \frac{2c\theta}{1 + t^2 + \theta^2},$$

on retrouve l'équation (1). On aura donc la propriété réciproque :

Tout cône du second ordre, ayant son sommet au point central de la transformation, coupe l'ellipsoïde suivant une quartique gauche qui se transforme en une conique.

Toutes les quartiques ainsi déterminées ont un point double réel ou isolé, au sommet A′ de l'ellipsoïde; je les désignerai sous le nom de *quartiques coniques* pour les distinguer des quartiques d'un autre genre que j'aurai à considérer dans la suite de ce travail.

2. Le centre de la conique (1) a pour coordonnées

$$t_1 = \frac{CD - BE}{B^2 - AC}, \qquad \theta_1 = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}.$$

Je joins le point correspondant de l'ellipsoïde au sommet A′; j'obtiens ainsi une droite ayant pour équations

$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{bt_1} = \frac{z}{c\theta_1} \tag{3}$$

et dont le plan diamétral dans le cône (2) est

$$F\frac{x}{a} + D\frac{y}{b} + E\frac{z}{c} + F + t_1\left(D\frac{x}{a} + A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + D\right) + \theta_1\left(E\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + C\frac{z}{c} + E\right) = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation t_1 et θ_1 par les valeurs indiquées plus haut, il vient après simplification

$$x + a = 0.$$

Le plan diamétral de la droite (3) est donc parallèle au plan YOZ. Par conséquent :

Le centre de la conique (1) *correspond au point où le diamètre conjugué des plans parallèles à* YOZ *dans le cône* (2), *rencontre l'ellipsoïde.*

J'appellerai ce point *centre de la quartique conique.*

3. Si l'on coupe l'ellipse (1) du plan fondamental par une série de cordes parallèles à une direction (D), la quartique conique correspondante sera coupée par une série d'ellipse (Γ) passant au sommet A' de l'ellipsoïde et dont les plans coupent YOZ suivant des droites parallèles à une certaine direction (γ).

Chacune des ellipses (Γ) rencontrera la quartique conique en deux points. D'après la propriété établie plus haut (I), le diamètre conjugué (D') des cordes de direction (D) par rapport à la conique du plan fondamental correspondra à une ellipse (Γ') dont le plan coupera YOZ suivant une droite dont la direction (γ') sera conjuguée de (γ) par rapport à la conique (e) d'intersection du cône (2) par le plan YOZ.

Je désignerai cette ellipse (Γ') sous le nom d'*ellipse diamétrale conjuguée de la direction* (Γ).

On peut immédiatement énoncer alors la propriété suivante :

Toutes les ellipses diamétrales d'une quartique conique passent par le centre de cette courbe.

En particulier, les deux axes de la conique (1) correspondent à deux ellipses passant au sommet A′ et dont les plans coupent YOZ suivant deux droites de directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan ; mais, d'après ce qui précède, ces deux directions sont aussi conjuguées par rapport à la conique (e) du cône (2). J'appellerai *ellipses principales de la quartique conique* celles qui correspondent aux deux axes de la conique (1).

Et l'on pourra dire que :

Si l'on considère un cône du deuxième degré ayant son sommet au sommet A′ de l'ellipsoïde et qui détermine sur cette surface une quartique conique, les plans des deux ellipses principales de cette courbe gauche coupent le plan YOZ suivant deux directions conjuguées communes aux deux coniques déterminées par ce plan dans le cône et dans l'ellipsoïde.

4. 1° Lorsque la conique (1) du plan fondamental est une ellipse, la quartique conique correspondante a un point double isolé : le point A′ sommet de l'ellipsoïde.

2° Si la conique (1) est une hyperbole, le point double A′ est réel : il correspond d'ailleurs aux deux points à l'infini de l'hyperbole. Les asymptotes, étant tangentes à l'hyperbole à l'infini, correspondent à deux ellipses passant en A′ et tangentes aux deux branches de la quartique conique; ces deux ellipses passent au centre de la quartique.

En particulier, pour une hyperbole équilatère, les plans des deux ellipses tangentes au point double A′ coupent le plan YOZ suivant deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan.

3° Enfin si la conique (1) est une parabole, les deux tangentes à l'infini sont confondues; la conique d'intersection du cône (2) par le plan YOZ est une parabole; ce cône a donc une génératrice parallèle à YOZ : la quartique conique correspondante a un point de rebroussement en A′. Dans ce cas, toutes les ellipses diamétrales de la quartique coupent YOZ suivant des droites parallèles.

5. On voit, d'après ce qui précède, que les quartiques coniques situées sur l'ellipsoïde sont tout à fait assimilables aux coniques du plan, et que, des nombreuses propriétés de celles-ci, on pourra déduire les propriétés de celles-là.

Une conique du plan étant déterminée par cinq points du plan :

Toute quartique conique est déterminée par cinq points de l'ellipsoïde.

Si l'on se donne quatre points du plan, on sait que le lieu des centres des coniques passant par ces points est une conique; donc :

Le lieu des centres des quartiques coniques passant par quatre points de l'ellipsoïde est une quartique conique.

A chaque propriété des coniques correspond donc une propriété des quartiques coniques; mon but n'est pas d'énoncer toutes ces propriétés, il suffit d'indiquer

cette corrélation entre les deux espèces de courbes pour qu'on puisse en tirer toutes les conséquences logiques.

Je me bornerai à quelques remarques générales.

Remarques. — Lorsque la conique (1) passe à l'origine ω du plan fondamental, la quartique conique correspondante passe au sommet A de l'ellipsoïde; si la conique (1) a son centre en ω, la quartique a son centre en A.

Si la conique (1) a ses deux axes parallèles à ωt et $\omega\theta$, la quartique conique correspondante a deux ellipses principales dont les plans sont parallèles aux axes OY et OZ de l'ellipsoïde.

Quand le centre de la conique (1) se déplace sur une droite ou sur un cercle, le centre de la quartique correspondante décrit une ellipse, qui, dans le premier cas, passe au sommet A'.

Si la conique (1) reste tangente à une droite, à un cercle ou à une conique, la quartique conique aura pour enveloppe dans les cas correspondants : une ellipse passant en A', une ellipse ou une quartique conique.

6. La tangente et la normale en un point de la conique (1) ont pour correspondantes deux ellipses dont l'une est tangente à la quartique conique, qui passent en A' et qui coupent le plan YOZ suivant deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde située dans ce plan. Je désignerai ces deux ellipses sous le nom d'*ellipse tangente*, et *ellipse normale* en un point de la quartique.

Le cercle osculateur en un point de la conique (1) est le transformé d'une *ellipse osculatrice* à la quartique conique au point correspondant. Le plan de cette ellipse osculatrice coupe YOZ suivant une droite paral-

lèle à la droite d'intersection du plan de *l'ellipse tangente* avec YOZ.

Le centre de courbure de la conique (1) est le transformé d'un point situé sur *l'ellipse normale*, à l'intersection de cette ellipse avec la droite qui joint le point A′ au pôle du plan de l'ellipse osculatrice (*voir* G. DE LONGCHAMPS, *J. S.*, 1884).

7. A un cercle bitangent à la conique (1) correspond une ellipse bitangente à la quartique conique. Dans le cas où ce cercle se réduit à un point, c'est un foyer de la conique (1). De même, on appellera *foyer* d'une quartique conique, toute ellipse-point bitangente à cette quartique.

D'après cela, une quartique conique a quatre foyers situés deux à deux sur ses ellipses principales.

A un système de coniques homofocales du plan fondamental correspondra un système de quartiques coniques homofocales sur l'ellipsoïde. On pourra énoncer les propriétés suivantes :

Si l'on considère un système de quartiques coniques homofocales, par tout point de l'ellipsoïde passent deux quartiques du système.

L'une de ces quartiques a un point double isolé au point A′ ; *l'autre a un point double réel en ce point.*

En leurs points de rencontre, l'ellipse tangente à l'une de ces deux quartiques est l'ellipse normale à l'autre et vice versa.

3° *Quartiques gauches.*

1. Les quartiques coniques ne constituent qu'un cas particulier des quartiques gauches générales, obtenues

par l'intersection de l'ellipsoïde avec une surface du deuxième ordre quelconque.

Je vais donc chercher quelle est, sur le plan fondamental, la transformée de la quartique gauche d'intersection de l'ellipsoïde

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

avec une quadrique quelconque

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{x^2}{a^2}+A'\frac{y^2}{b^2}+A''\frac{z^2}{c^2}+2B\frac{yz}{bc}+2B'\frac{zx}{ca}+2B''\frac{xy}{ab}\\ &\qquad\qquad +2C\frac{x}{a}+2C'\frac{y}{b}+2C''\frac{z}{c}+D=0.\end{aligned}\right.$$

Je n'ai qu'à remplacer, dans cette équation (4), x, y, z par leurs valeurs indiquées plus haut, et j'obtiens

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(A-2C+D)(t^2+\theta^2)^2\\ &\quad -4[(B''-C')+(B'-C'')\theta](t^2+\theta^2)\\ &\quad +(4A'-2A+D)t^2+8Bt\theta+(4A''-2A+D)\theta^2\\ &\qquad +4(B''-C')t+4(B'-C'')\theta+A+2C+D=0,\end{aligned}\right.$$

équation d'une quartique plane bicirculaire ou cyclique plane.

Inversement, si l'on considère une cyclique plane

$$M(t^2+\theta^2)^2-4(Nt-P\theta)(t^2+\theta^2)+\varphi(t,\theta)=0,$$

où $\varphi(t,\theta)$ est une fonction du deuxième degré, et qu'on remplace dans son équation t et θ par leurs valeurs

$$t=\frac{ay}{b(a+x)},\qquad \theta=\frac{az}{c(a+x)},$$

il vient

$$M\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2-4\left(N\frac{y}{b}+P\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$+\left(1+\frac{x}{a}\right)^2\psi(y,z)=0,$$

où $\psi(y, z)$ est une fonction du deuxième degré; mais, d'après l'équation (3),

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

L'équation précédente s'écrira donc

$$M\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 - 4\left(N\frac{y}{b} + P\frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 \psi(y, z) = 0,$$

et, en supprimant le facteur $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2$,

$$M\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 4\left(N\frac{y}{b} + P\frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \psi(y, z) = 0,$$

équation d'une surface du second ordre.

On conclut donc de ce qui précède que :

Toute quartique gauche située sur l'ellipsoïde se transforme suivant une cyclique plane, et réciproquement.

2. L'équation (5) ne représente une cyclique plane que si l'expression $A - 2C + D$ n'est pas nulle. Si $A - 2C + D = 0$, l'équation (5) représente une cubique circulaire ; dans ce cas, si l'on cherche l'intersection de la quadrique (4) avec l'axe des x, on trouve la solution

$$x = -a.$$

La quadrique (4) passe donc au point A'; par suite :

Toute quartique gauche de l'ellipsoïde, passant au pôle de la transformation omaloïdale, se transforme suivant une cubique circulaire du plan fondamental.

3. Je pose

$$(6) \qquad \alpha = \frac{B'' - C'}{A - 2C + D}, \qquad \beta = \frac{B' - C''}{A - 2C + D}.$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &(t^2+\theta^2)^2 - 4(\alpha t + \beta\theta)(t^2+\theta^2) + \frac{4A' - 2A + D}{A - 2C + D} t^2 \\ &\quad + \frac{8B}{A - 2C + D} t\theta + \frac{4A'' - 2A + D}{A - 2C + D} \theta^2 \\ &\qquad + 4\alpha t + 4\beta\theta + \frac{A + 2C - D}{A - 2C + D} = 0 \end{aligned} \right.$$

et représente une cyclique ayant pour *centre* le point dont les coordonnées sont α et β [1].

J'appellerai *centre* de la quartique gauche le point qui, sur l'ellipsoïde, correspond au centre de la cyclique du plan fondamental. Voyons comment on peut déterminer ce *centre*. Pour cela, je considère le plan polaire du point A' par rapport à la quadrique (4) : ce plan a pour équation

$$(8) \qquad (C - A)\frac{x}{a} + (C' - B'')\frac{y}{b} + (C'' - B')\frac{z}{c} + D - C = 0$$

et je cherche son pôle par rapport à l'ellipsoïde. Le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) par rapport à l'ellipsoïde a pour équation

$$(9) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0.$$

L'identification des équations (8) et (9) conduit aux

---

[1] Le mot *centre* est employé ici dans le sens que lui a donné M. Humbert dans son *Étude sur les cyclides* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVe Cahier; 1885).

égalités

$$x_0 = -a\,\frac{C - A}{D - C},$$

$$y_0 = -b\,\frac{C' - B''}{D - C},$$

$$z_0 = -c\,\frac{C'' - B'}{D - C}.$$

La droite qui joint le sommet A′ de l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation

$$\frac{x + a}{a(A - 2C + D)} = \frac{y}{b(B'' - C')} = \frac{z}{c(B' - C'')},$$

ou, d'après les relations (6),

$$\frac{x + a}{a} = \frac{y}{b\alpha} = \frac{z}{c\beta}$$

et l'on voit qu'elle coïncide avec la droite qui joint le point A′ au centre de la quartique gauche. Donc :

Le centre d'une quartique gauche déterminée sur l'ellipsoïde par une quadrique Q s'obtient en joignant le sommet A′ au pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan polaire du point A′ par rapport à la quadrique Q et en prenant le point d'intersection de la droite ainsi déterminée avec l'ellipsoïde.

4. L'équation (8) du plan polaire de A′ par rapport à la quadrique (4) peut s'écrire

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\,\frac{x}{a} - \alpha\,\frac{y}{b} - \beta\,\frac{z}{c} + \frac{D - C}{A - 2C + D} = 0.$$

Lorsque α et β sont fixes, on voit que ce plan coupe YOZ suivant une droite ayant une direction fixe. Donc :

Les plans polaires du sommet A′ par rapport à toutes les quadriques qui déterminent sur l'ellipsoïde des quartiques gauches de même centre coupent le

plan YOZ *suivant des droites parallèles à une direction fixe.*

En particulier, si $\alpha = \beta = 0$, le plan polaire du sommet A' est parallèle au plan YOZ.

5. Je suppose que le centre (α, β) de la cyclique du plan fondamental se déplace sur une droite

$$mt + n\theta + p = 0.$$

On peut écrire l'équation (8)

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \alpha\frac{y}{b} - \beta\frac{z}{c} + 1 = 0.$$

D'autre part on a

$$m\alpha + n\beta + p = 0;$$

par suite, l'équation précédente devient

$$\frac{C - A}{A - 2C + D}\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \alpha\left(\frac{y}{b} + \frac{m}{p}\right) - \beta\left(\frac{z}{c} + \frac{n}{p}\right) = 0.$$

Le plan polaire du sommet A' passe donc par le point fixe $P\left(-a, \frac{-bm}{p}, \frac{-cn}{p}\right)$.

Mais, dans ce cas, le centre de la quartique gauche décrit une ellipse passant par A' et dont le plan a pour équation

$$m\frac{y}{b} + n\frac{z}{c} + p\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0,$$

et c'est justement le plan polaire du point P par rapport à l'ellipsoïde. Donc :

Lorsque des quadriques Q déterminent sur l'ellipsoïde des quartiques gauches dont les centres sont sur une ellipse E *passant par le sommet* A', *les plans polaires de ce point* A' *par rapport à toutes ces qua-*

driques passent par un point fixe P *qui est le pôle du plan de l'ellipse* E *par rapport à l'ellipsoïde.*

6. On pourra donc assimiler les quartiques gauches aux cycliques planes, et déduire leurs propriétés de celles de ces dernières courbes; l'énumération en serait trop longue.

Je me bornerai à citer les plus importantes :

On sait que le lieu des centres des coniques inscrites à une cyclique plane est une hyperbole que l'on nomme conique principale de la cyclique; *cette conique principale passe au centre de la cyclique* ([1]).

De même :

Le lieu des centres des quartiques coniques inscrites à une quartique gauche est une quartique conique à point double réel, qui passe au centre de la quartique gauche. On la nommera quartique conique principale de la quartique gauche.

Enfin on peut imaginer pour les quartiques gauches sur l'ellipsoïde un mode de génération analogue à celui indiqué par Casey pour les cycliques planes :

Imaginons une ellipse fixe (E) *sur l'ellipsoïde, et une série d'autres ellipses* (e) *qui coupent* (E) *de façon que les plans des ellipses tangentes à* (e) *et* (E) *en leurs points de rencontre déterminent sur* YOZ *deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse principale de l'ellipsoïde. Si nous supposons, de plus, que les centres des ellipses* (e) *sont sur une quartique conique* (Γ), *l'enveloppe des ellipses* (e) *sera une quartique gauche ayant pour centre le centre de* (Γ).

([1]) *Voir* mon étude : *Sur les cycliques planes* (*Journal de Mathématiques spéciales*, de Longchamps, 1892-93).

Comme pour les cycliques planes, il y aura quatre modes de génération semblables pour les quartiques gauches ([1]).

Les quatre quartiques coniques (Γ) *sont homofocales.*

Enfin, si l'on définit toujours le *foyer* d'une quartique sur l'ellipsoïde comme on l'a fait plus haut, on pourra dire que :

A un système de cycliques homofocales du plan fondamental correspond un système de quartiques gauches homofocales sur l'ellipsoïde.

On pourra désigner les quatre ellipses (E) sous le nom d'*ellipses directrices de la quartique gauche*; et les quartiques coniques (Γ) sous le nom de *quartiques focales.*

De même que pour les cycliques planes on dira que :

Sur l'ellipsoïde une quartique gauche a seize foyers. Ces seize foyers sont situés sur quatre ellipses.

Ce théorème est analogue à celui du Dr Hart.

Si l'on appelle *pôles* de la quartique gauche les centres des ellipses directrices E, on pourra énoncer la propriété suivante :

Pour chacun des pôles d'une quartique gauche, on peut tracer deux ellipses passant par le sommet A′ *et bitangentes à la quartique.*

Enfin l'on peut faire une classification des quartiques

([1]) Voir *Journal de Mathematiques speciales* de Longchamps, *loc. cit.*

gauches, analogue à celle des cycliques planes, en se basant sur la forme de leur quadrique principale ([1]).

7. Je terminerai cette étude en appliquant ce qui précède à la transformation des lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On sait que ces lignes sont déterminées par les intersections de cet ellipsoïde avec les surfaces homofocales de la série

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

où λ est un paramètre variable.

Des deux équations précédentes, on déduit

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\lambda)} = 0,$$

et si l'on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de t et θ, il vient

(10) $$\frac{(1-t^2-\theta^2)^2}{a^2+\lambda} + \frac{4t^2}{b^2+\lambda} + \frac{4\theta^2}{c^2+\lambda} = 0,$$

équation qui représente des cycliques ayant pour centre l'origine ω du plan fondamental et pour axes de symétrie ωt et $\omega\theta$.

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde ont donc leur *centre* au sommet A, et leur *quartique conique principale* se décompose en deux ellipses qui sont les sections principales de l'ellipsoïde situées dans les plans XOY et XOZ. Donc :

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se transfor-

([1]) Voir *Journal de Mathématiques spéciales, loc. cit.*

ment suivant des cycliques planes à deux axes, ayant même centre et mêmes axes de symétrie.

La théorie des cycliques planes indique que l'origine ω est un pôle double des cycliques (10); les deux autres pôles sont à l'infini. Par suite :

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde ont pour pôles doubles les sommets A *et* A′ *de la surface.*

Les cycliques (10) ont pour cercles directeurs les deux axes ωt et $\omega\theta$ et les deux cercles

$$t^2 + \theta^2 = \pm 1.$$

En transformant cette propriété :

Les lignes de courbure ont pour coniques directrices les quatre ellipses déterminées sur l'ellipsoïde par les trois plans principaux de cette surface et par le plan de l'infini.

Enfin on verrait de même que :

Les quartiques focales des lignes de courbure sont les deux ellipses principales XOY *et* XOZ *de l'ellipsoïde et deux quartiques coniques.*

Ces deux quartiques coniques correspondent aux coniques focales des cycliques (10), qui ont respectivement pour équations

$$\frac{t^2}{\dfrac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}} + \frac{\theta^2}{\dfrac{a^2-c^2}{c^2+\lambda}} + 1 = 0$$

et

$$\frac{t^2}{\dfrac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}} + \frac{\theta^2}{\dfrac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}} + 1 = 0.$$

Les lignes de courbure, étant des quartiques gauches, sont susceptibles d'un mode de génération analogue; il est facile de l'imaginer d'après ce qui précède.

II. — Transformation de l'hyperboloïde à une nappe.

1° *Sections planes.*

1. La considération des génératrices qui passent par un point de la surface, et dont les équations sont

$$(G)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}-1\right)=t\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right), \\ t\left(\frac{x}{a}+1\right)=\frac{z}{c}+\frac{y}{b} \end{cases}$$

et

$$(G')\quad \begin{cases} \frac{x}{a}-1=\theta\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right), \\ \theta\left(\frac{x}{a}+1\right)=\frac{z}{c}-\frac{y}{b}, \end{cases}$$

conduit aux formules de transformation citées plus haut

$$\frac{x}{a}=\frac{1+t\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{y}{b}=\frac{t-\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{z}{c}=\frac{t+\theta}{1-t\theta},$$

d'où l'on déduit les formules inverses

$$t=\frac{a(bz+cy)}{bc(x+a)},\qquad \theta=\frac{a(bz-cy)}{bc(x+a)}.$$

Ces formules montrent immédiatement que les génératrices du système (G) seront représentées sur le plan fondamental par des parallèles à l'axe ωt : celles du système (G′) par des parallèles à l'axe $\omega\theta$.

L'origine ω du plan fondamental correspond au som-

met A de l'hyperboloïde; les deux axes ωt et $\omega\theta$ sont les droites transformées des deux génératrices passant en A. On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si, par un point m du plan fondamental, on mène des parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$, ces deux droites sont les transformées des deux génératrices de l'hyperboloïde qui passent au point M *correspondant au point m du plan fondamental.*

2. Je cherche la courbe transformée de la section de l'hyperboloïde par le plan

$$(1) \qquad \alpha\frac{x}{a} + \beta\frac{y}{b} + \gamma\frac{z}{c} + \delta = 0.$$

Les formules de transformation conduisent à l'équation

$$(2) \qquad (\alpha - \delta)t\theta + (\beta + \gamma)t + (\gamma - \beta)\theta + \alpha + \delta = 0;$$

elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées

$$t = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \delta}, \qquad \theta = \frac{\beta + \gamma}{\alpha - \delta},$$

et l'on vérifie aisément qu'il correspond au point de l'hyperboloïde obtenu en joignant le sommet A' de cette surface au pôle du plan (1). Donc :

Toute section plane de l'hyperboloïde à une nappe se transforme suivant une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

J'ai supposé $\alpha - \delta \neq 0$; dans les cas où $\alpha - \delta = 0$, la transformée devient une droite; alors le plan sécant a

pour équation

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+1\right)+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}=0.$$

Par suite :

Toute section plane passant au sommet A' de l'hyperboloïde se transforme suivant une droite du plan fondamental.

3. On déduit immédiatement des formules de transformation les résultats suivants :

1° *Les sections principales de l'hyperboloïde sont représentées sur le plan fondamental comme suit :*

YOZ par l'hyperbole équilatère....	$t\theta+1=0$
ZOX par la droite...............	$t+\theta=0$
XOY par la droite...............	$t+\theta=0$

2° *Les sections parallèles à* YOZ *se transforment suivant des hyperboles équilatères ayant leur centre à l'origine.*

Les sections parallèles à $\left|\begin{matrix}\text{ZOX}\\ \text{XOY}\end{matrix}\right|$ *sont représentées par des hyperboles dont le centre est sur la bissectrice* $\left|\begin{matrix}t+\theta=0\\ t-\theta=0\end{matrix}\right|$ *et passant par deux points fixes* $\left|\begin{matrix}\text{réels}\\ \text{imaginaires}\end{matrix}\right|$ *situés sur la droite* $\left|\begin{matrix}t-\theta=0\\ t+\theta=0\end{matrix}\right|$.

3° *Enfin, toute section passant par l'axe* AA' *de l'hyperboloïde se transforme suivant une droite passant à l'origine* ω.

On pourra, comme pour l'ellipsoïde, vérifier facilement les propriétés suivantes :

Deux droites parallèles correspondent à des sections passant par A', *dont les plans coupent* YOZ *suivant deux droites parallèles.*

Deux droites rectangulaires, à des sections passant par A′, *dont les plans coupent* YOZ *suivant deux directions conjuguées par rapport à l'hyperbole principale située dans ce plan.*

4. Les formules de transformation montrent que, lorsque

(H) $$t\theta - 1 = 0,$$

les coordonnées x, y, z deviennent infinies. Donc :

Les points à l'infini de l'hyperboloïde sont représentés sur le plan fondamental par l'hyperbole équilatère (H).

De là résultent les propriétés suivantes :

1° *Deux droites parallèles aux axes* ωt *et* $\omega\theta$ *et se coupant sur l'hyperbole* (H) *représentent deux génératrices parallèles de système différent sur l'hyperboloïde.*

2° *Toute courbe du plan fondamental rencontrant en un point* m *l'hyperbole* (H) *est la transformée d'une courbe de l'hyperboloïde ayant un point à l'infini sur cette surface. La direction asymptotique sera celle des deux génératrices parallèles dont les transformées passent au point* m.

3° *Toute courbe du plan fondamental tangente à l'hyperbole* (H) *est la transformée d'une courbe de l'hyperboloïde ayant une branche infinie parabolique.*

En appliquant ces deux derniers résultats aux sections planes on voit que la section sera *elliptique* si l'hyperbole (2) ne rencontre pas (H); *hyperbolique* si

l'hyperbole (2) rencontre (H) en deux points distincts; *parabolique* si elle lui est tangente.

5. Je pose

$$t = k\theta$$

et je suppose que le point (t, θ) du plan fondamental s'éloigne à l'infini dans cette direction; les formules de transformation deviennent

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + k\theta^2}{1 - k\theta^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\theta(k-1)}{1 - k\theta^2}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{\theta(k+1)}{1 - k\theta^2}$$

et, si θ croît au delà de toute limite, on a

$$\lim \frac{x}{a} = -1, \qquad \lim \frac{y}{b} = 0, \qquad \lim \frac{z}{c} = 0.$$

Il résulte de là que :

Au sommet A′ *de l'hyperboloïde correspond la droite de l'infini du plan fondamental.*

Or, si l'on considère les points à l'infini sur ωt et $\omega\theta$, ces points sont les transformés des points à l'infini des deux génératrices de l'hyperboloïde passant en A′, puisqu'ils sont situés sur l'hyperbole (H).

On peut donc dire que :

Aux deux génératrices de l'hyperboloïde passant au sommet A′ *correspondent les points à l'infini du plan fondamental, situés sur* ωt *et* $\omega\theta$.

6. Enfin, la propriété démontrée plus haut pour l'ellipsoïde, et relative au centre des moyennes distances de n points du plan fondamental, subsiste pour l'hyperboloïde à une nappe et se démontre de la même manière.

2° *Quartiques gauches.*

1. De même que pour l'ellipsoïde, à toute conique du plan fondamental

$$At^2 + 2Bt\theta + C\theta^2 + 2Dt + 2E\theta + F = 0$$

correspond une *quartique conique*, intersection de l'hyperboloïde avec un cône ayant son sommet au point A' et dont l'équation est

$$A\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)^2 + 2B\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) + C\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)^2$$
$$+2\left(1+\frac{x}{a}\right)\left[D\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)+E\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\right]+F\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 = 0.$$

On peut énoncer pour ces quartiques coniques les mêmes propriétés que pour celles qui sont situées sur l'ellipsoïde; je ne m'y arrêterai pas.

2. Si l'on cherche la transformée de la quartique d'intersection de l'hyperboloïde avec la quadrique

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{x^2}{a^2} + A'\frac{y^2}{b^2} + A''\frac{z^2}{c^2} + 2B\frac{yz}{bc} + 2B'\frac{zx}{ca} \\ &\quad + 2B''\frac{xy}{ab} + 2C\frac{x}{a} + 2C'\frac{y}{b} + 2C''\frac{z}{c} + D = 0, \end{aligned}\right.$$

on trouve après réduction

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(A - 2C + D)t^2\theta^2 \\ &\quad + 2(B' + B'' - C' - C'')t^2\theta + 2(B' - B'' + C' - C'') \\ &\quad + \theta^2 + (A' + A'' + 2B)t^2 + 2(A - A' + A'' - D)t\theta \\ &\quad + (A' + A'' - 2B)\theta^2 + 2(B' + B'' + C' + C'')t \\ &\qquad\qquad + 2(B' - B'' - C' + C'')\theta + A + 2C + D = 0. \end{aligned}\right.$$

En désignant par $\varphi(t\theta)$ l'ensemble des termes du deuxième degré, du premier degré et du terme constant; et en posant

$$B' - C'' = \alpha, \qquad B'' - C' = \beta,$$

l'équation précédente s'écrit

$$(A - 2C + D)t^2\theta^2 + [(\alpha + \beta)t + (\alpha - \beta)\theta]t\theta + \varphi(t\theta) = 0;$$

elle représente une quartique plane dont les directions asymptotiques sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$; cette courbe a, en général, quatre points à l'infini sur ωt et $\omega\theta$; ces points correspondent aux points de l'hyperboloïde où la quartique gauche rencontre les deux génératrices passant par le sommet A'.

Donc :

Toute quartique gauche de l'hyperboloïde se transforme en une quartique plane dont les directions asymptotiques sont parallèles aux axes ωt et $\omega\theta$.

Dans le cas particulier où $A - 2C + D = 0$, la courbe du plan fondamental se réduit au troisième degré; il est facile de voir que la quadrique (2) passe alors au sommet A'; donc :

Toute quartique gauche de l'hyperboloïde passant au sommet A' se transforme suivant une cubique plane.

3. Les quartiques (3) jouissant des mêmes propriétés diamétrales que les cycliques planes, tout diamètre y est perpendiculaire à la direction des cordes correspondantes; tous les diamètres passent par un point fixe appelé *centre* qui a pour coordonnées

$$t = -\frac{\alpha + \beta}{A - 2C + D}, \qquad \theta = -\frac{\alpha - \beta}{A - 2C + D}.$$

On aura donc, à ce point de vue, pour les quartiques gauches de l'hyperboloïde des propriétés analogues à celles des quartiques situées sur l'ellipsoïde; il est inutile de les énoncer.

4. A chaque point d'intersection de la quartique (3) avec l'hyperbole équilatère (H), correspond un point à l'infini pour la quartique gauche de l'hyperboloïde. Or, si l'on combine les deux équations (3) et (H), on arrive à la suivante

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (A'+A''+2B)\,t^2+(A'+A''-2B)\,\theta^2 \\ \quad +4(B'+B'')\,t+4(B'-B'')\,\theta+4A-2A'+2A''=0, \end{array} \right.$$

qui représente une conique dont les axes sont parallèles à ωt et $\omega\theta$; et, c'est en cherchant les points d'intersection de cette conique avec l'hyperbole (H) que l'on aura les branches infinies de la quartique gauche. J'appellerai la conique (4) la *caractéristique* de la quartique gauche.

5. Si l'on coupe le cône asymptote de l'hyperboloïde par le plan YOZ, on obtient deux droites D et D' représentées dans ce plan par l'équation

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Si l'on transporte le sommet du cône asymptote de la quadrique (Q) au centre O de l'hyperboloïde, l'intersection de ce cône par le plan YOZ sera composée des deux droites D_1 et D'_1 dont l'équation est

$$A'\frac{y^2}{b^2}+A''\frac{z^2}{c^2}+2B\frac{yz}{bc}=0.$$

Or, dans le cas où la caractéristique est une ellipse, on a

$$(A'+A''+2B)(A'+A''-2B)>0$$

et les droites D_1 et D'_1 sont comprises dans l'angle DOD'.

Si la caractéristique est une hyperbole,

$$(A' + A'' + 2B)(A' + A'' - 2B) < 0$$

et les directions D et D'_1 séparent les directions D et D'.

Si la caractéristique est une parabole, l'une des droites D_1 et D'_1 se confond avec D ou D'.

6. La considération de la caractéristique permet de faire une classification des quartiques gauches de l'hyperboloïde, relativement aux branches infinies de ces courbes :

1° La caractéristique rencontre l'hyperbole (H) en quatre points réels distincts; à ce cas correspondent *les quartiques gauches à quatre branches hyperboliques.*

2° Les quatre points d'intersection de la caractéristique avec l'hyperbole sont imaginaires : *quartiques gauches fermées.*

3° La caractéristique est tangente à l'hyperbole (H); les deux autres points de rencontre peuvent être réels ou imaginaires; d'où deux espèces de quartiques :

(α). *Quartiques gauches à branche parabolique et à deux branches hyperboliques;*

(β). *Quartiques gauches à branche parabolique.*

4° La caractéristique est bitangente à l'hyperbole (H). *Quartiques gauches à deux branches paraboliques.*

5° La caractéristique est osculatrice à l'hyperbole (H). *Quartiques gauches à deux branches hyperboliques, l'une de ces branches étant située d'un même côté de son asymptote :* c'est celle qui correspond au point d'osculation.

III. — Transformation de l'hyperboloïde à deux nappes.

1° *Sections planes.*

1. Les résultats que l'on obtient par la transformation omaloïdale de l'hyperboloïde à deux nappes sont analogues à ceux obtenus dans celle de l'ellipsoïde; je m'attacherai donc à faire ressortir simplement les différences des deux transformations.

Pour l'hyperboloïde à deux nappes, les formules de transformation sont

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - t^2 - \theta^2}{2\theta}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{t}{\theta}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{1 + t^2 + \theta^2}{2\theta};$$

on en déduit les formules inverses

$$\theta = \frac{ac}{az + cx}, \qquad t = \frac{acy}{b(az + cx)}.$$

De ces formules on peut tirer immédiatement les résultats suivants :

1° *Les sections principales de l'hyperboloïde se transforment comme il suit :*

YOZ en un cercle................	$t^2 + \theta^2 = 1$
ZOX suivant l'axe $\omega\theta$............	$t = 0$
XOY en un cercle imaginaire....	$t^2 + \theta^2 = -1$

2° *Les sections parallèles à* $\left|\begin{matrix}\text{YOZ}\\ \text{XOY}\end{matrix}\right|$, *en des cercles ayant leur centre sur l'axe $\omega\theta$ et coupant l'axe ωt en deux points* $\left|\begin{matrix}\text{réels} & t = \pm 1\\ \text{imaginaires} & t = \pm i\end{matrix}\right|$. *Les sections parallèles à* ZOX, *en des droites passant à l'origine* ω.

2. *Toute section plane de l'hyperboloïde*

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} + \delta = 0$$

se transforme en un cercle

$$(\gamma - \alpha)(t^2 + \theta^2) + 2\beta t + 2\delta\theta + \alpha + \gamma = 0.$$

Cependant, dans le cas où $\gamma - \alpha = 0$, la transformée est une droite

$$2\beta t + 2\delta\theta + 2\alpha = 0;$$

mais alors le plan de la section

$$\alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \beta \frac{y}{b} + \delta = 0$$

est parallèle à la droite

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ceci montre que, pour l'hyperboloïde à deux nappes :

Le pôle de la transformation omaloïdale est à l'infini sur la droite (D).

Enfin on voit facilement que :

1° *Toute section dont le plan passe par la droite* (D) *se transforme en une droite parallèle à* $\omega\theta$.

2° *Toute section parallèle au plan déterminé par la droite* (D) *et l'axe* OY *se transforme en une droite parallèle à* ωt.

3. A deux droites parallèles

$$\begin{aligned} At + B\theta + C &= 0, \\ At + B\theta + C' &= 0, \end{aligned}$$

correspondent des sections dont les plans sont

$$A\frac{y}{b} + B + C\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

$$A\frac{y}{b} + B + C'\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

et l'on voit que ces plans rencontrent l'axe OY au même point

$$y = -\frac{bB}{A}.$$

Deux droites parallèles correspondent à des sections parallèles à la droite (D) *et coupant l'axe* OY *au même point.*

On vérifiera de même la propriété suivante :

Deux droites rectangulaires correspondent à des sections parallèles à la droite (D) *et coupant l'axe* OY *en deux points m et n situés de part et d'autre de l'origine et tels que*

$$xm.on = b^2.$$

On peut déduire de tous ces résultats des propriétés analogues à celles que M. de Longchamps a démontrées pour l'ellipsoïde (*Journal de Math. spéciales, loc. cit.*).

4. On peut remarquer, d'après les formules inverses de la transformation, que si

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

t et θ sont infinis. Donc :

Au point à l'infini sur la droite (D) *correspond la droite de l'infini du plan fondamental.*

De même pour $\theta = 0$, x, y et z sont infinis. Par suite :

Les points à l'infini de l'hyperboloïde à deux nappes sont représentés par l'axe ωt.

On aura donc les points à l'infini d'une courbe située sur l'hyperboloïde en cherchant les points d'intersection de sa transformée, avec l'axe ωt; à chacun de ces points correspondra une branche hyperbolique. Si la transformée est tangente à ωt, au point de contact correspondra une branche parabolique.

2° *Quartiques gauches.*

1. On démontre, comme plus haut, qu'à toute conique du plan fondamental correspond une quartique gauche de l'hyperboloïde, située sur un cylindre du deuxième degré dont les génératrices sont parallèles à la droite (D).

On obtient ainsi des *quartiques cylindriques* qui ont des propriétés analogues à celles des quartiques coniques.

2. Enfin, les formules de transformation montrent encore, que toute quartique gauche de l'hyperboloïde à deux nappes se transforme suivant une cyclique plane; toutes les déductions que l'on fera de ce résultat seront semblables à celles que l'on a faites dans le cas de l'ellipsoïde; tous les calculs sont identiques.

On pourra, de plus, classer les quartiques gauches de l'hyperboloïde à deux nappes, relativement à leurs branches infinies, en cherchant les points d'intersection de leurs transformées avec l'axe ωt du plan fondamental. Je n'insisterai pas sur tous ces résultats : il a suffi de montrer comment on peut les obtenir.

QUELQUES OBSERVATIONS SUR UNE « PREMIÈRE LEÇON D'ALGÈBRE »;

Par M. Lucien LÉVY.

La très intéressante *Première leçon d'Algèbre* que vient de publier, dans les *Nouvelles Annales*, M. Fouché, m'a suggéré quelques observations que je voudrais soumettre à vos lecteurs.

D'abord, d'après M. Fouché, la plupart des mathématiciens seraient d'accord pour reconnaître que « la différence essentielle entre l'Algèbre et l'Arithmétique consiste dans l'introduction des nombres négatifs ». Je lui concède que telle paraît être l'opinion du jury d'Agrégation (1). Voici cependant un excellent Ouvrage d'Arithmétique que vient de publier M. E. Humbert, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, avec Préface approbative de M. Jules Tannery, et où figurent les nombres entiers négatifs dès la page 29; M. Tannery limite même le domaine de l'Algèbre à la théorie des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables.

De mon côté, pour me conformer à l'usage français qui veut qu'une science soit définie au début et non quand on en a achevé l'étude, j'ai depuis longtemps adopté la définition suivante (2) :

« L'Algèbre a pour objet : 1° d'étudier les propriétés

(1) Il semble aussi que ce soit l'opinion la plus répandue en Allemagne : ainsi un très petit Traité d'Arithmétique et d'Algèbre du Dr Kambly (26e édition en 1881) prononce le mot *algébrique* pour la première fois en introduisant les nombres positifs et négatifs, p. 26.

(2) Je partage entièrement les idées de M. Lévy et, depuis 1868,

de certains signes opératoires, abstraction faite de la signification des objets sur lesquels portent les opérations indiquées par ces signes; 2° d'envisager en particulier ce que deviennent ces propriétés dans le cas où les objets d'opération sont des nombres entiers. »

M. Fouché dit fort bien qu'il faudra définir l'égalité; j'ajoute qu'il faudra définir le signe zéro dans chaque nouvelle espèce de quantités.

Dans l'addition et la multiplication, M. Fouché prend comme définitions les deux propriétés qu'ont ces opérations de permettre l'interversion de l'ordre des deux

---

je dicte à mes élèves, au début du cours d'Algèbre, les lignes suivantes :

Définition de l'Algèbre.

1. On a vu, *en Arithmétique*, quelle était l'utilité des signes comme moyen d'abréviation et quelle était l'utilité des lettres comme moyen de généralisation. L'emploi des signes rend évidemment les mêmes services en Mathématiques que la sténographie dans l'écriture ordinaire, et l'emploi des lettres permet d'établir, sans confusion, les propriétés des nombres qui sont indépendantes de la valeur qu'on leur attribue. Ce n'est donc ni dans l'emploi des signes comme moyen d'abréviation, ni dans l'emploi des lettres comme moyen de généralisation que consiste l'*Algèbre*.

Quand, dans la solution d'un problème, on cherche à déterminer une inconnue qui n'existe peut-être pas, on est conduit à la soumettre à des opérations et à lui appliquer des règles qui n'ont été démontrées que pour les nombres que l'Arithmétique considère. On est donc amené graduellement à l'idée de combiner des lettres dépourvues de tout sens au point de vue de la quantité, conformément à des règles qu'on s'impose et qu'on aurait pu fixer d'une manière arbitraire. Mais, pour pouvoir utiliser les résultats auxquels on parvient ainsi, dans le cas où les lettres seraient la représentation de nombres, on fixe les règles auxquelles on soumet leurs combinaisons de manière à satisfaire à cette considération fondamentale : *Que si ces combinaisons prennent un sens arithmétique, le résultat soit arithmétiquement vrai.*

L'ensemble des résultats obtenus en combinant ainsi des lettres, abstraction faite de toute idée de valeur ou de quantité, constitue l'*Algèbre proprement dite*. CH. B.

objets ou des deux derniers sur trois objets. Il me semble préférable de respecter le choix fait par ceux qui ont déjà écrit sur ce sujet, Bourget, Hoüel (pour ne parler que des Français), et d'introduire, au lieu de la dernière propriété, la suivante, qui lui équivaut d'ailleurs :

$a + (b + c) = a + b + c$ pour l'addition,
$a \times (b \times c) = a \times b \times c$ pour la multiplication.

En d'autres termes, on apprend à ajouter une somme, à multiplier par un produit et à multiplier par une somme, et tous les théorèmes sur les opérations n'auront pas d'autre but que d'apprendre à combiner ces opérations : retrancher une somme, ajouter une différence, multiplier par un quotient, etc.

Enfin il est nécessaire, pour définir l'addition algébrique, ou plutôt la soustraction, de dire : si

$$a + b = a + b',$$

il en résulte

$$b = b';$$

et, pour définir la multiplication algébrique, ou plutôt la division : si

$$a \times b = a \times b',$$

il en résulte

$$b = b'.$$

C'est-à-dire la soustraction algébrique et la division algébrique n'ont chacune qu'une solution.

Nous possédons maintenant un ensemble d'opérations auxquelles pourront être soumis les nombres entiers, les nombres fractionnaires et tous les objets, nouveaux ou non, qu'il nous plaira d'introduire.

Définition des quantités négatives ou positives. — J'appelle *quantité positive* le binôme $0 + a$ que j'écris

pour abréger $+a$, quantité négative le binôme $o - a$ que j'écris $-a$. Il est facile alors de vérifier que

$$b + (+a) = b + a,$$
$$b + (-a) = b - a,$$
$$b - (+a) = b - a,$$
$$b - (-a) = b + a,$$
$$(+a) \times (+b) = +ab,$$

et ainsi pour toutes les règles des signes.

Si a désigne un nombre, la quantité positive ou négative est dite *nombre positif* ou *négatif*, et l'Arithmétique a à voir si l'emploi de ce symbole lui est utile.

Si a désigne une longueur, la quantité positive ou négative est dite *segment*, et la Géométrie a à voir si l'emploi de ce symbole lui est utile.

P. S. — Je m'aperçois que j'ai seulement signalé ce qui me sépare de M. Fouché. L'approbation de tout le reste en résulte évidemment.

SUR LES FORCES CENTRALES;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Quand un mobile parcourt sa trajectoire conformément à la loi des aires, il est classique de démontrer d'abord qu'il subit de l'origine des aires une accélération fonction de la distance seule. On calcule ensuite, et en s'appuyant sur ce premier résultat, la *grandeur* de la *vitesse* et celle de l'*accélération* en fonction des coordonnées polaires (r, θ) du point mobile et des

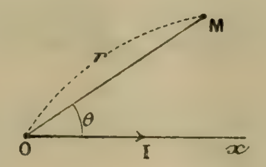
quantités $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$ qui définissent la forme de sa trajectoire au point (r, θ). La méthode consiste à éliminer le temps en le remplaçant, dans certaines expressions de la vitesse et de l'accélération, par sa valeur tirée de l'équation des aires

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k.$$

Par la même méthode de substitution, la Géométrie vectorielle permet de calculer en outre les *positions* de ces vecteurs, *vitesse* et *accélération*, et aussi celles des accélérations des divers ordres. Ce calcul est plus intuitif que le calcul classique ; de plus le résultat établit directement que l'accélération est centrale, sans qu'il soit nécessaire de donner de ce fait une démonstration spéciale.

2. Soient :

M le vecteur qui va du centre fixe O au point mobile M de coordonnées (r, θ);



I le vecteur unité qui est pris pour origine des angles θ;
i le symbole imaginaire [1];
e la base des logarithmes népériens.

---

[1] Dans la méthode des équipollences, cet opérateur a pour effet d'imprimer une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à tout vecteur qu'il multiplie.

Le vecteur M est représenté, dans la méthode vectorielle, par la formule

$$(1)\qquad M = r\mathrm{I}e^{i\theta}.$$

D'après cela, la vitesse du point M est

$$V = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dr}{d\theta} + ri\right)\mathrm{I}\,e^{i\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur $\frac{k}{r^2}$ tirée de l'équation des aires,

$$V = k\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{r}i\right)\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

Cette formule s'écrit un peu plus simplement, si l'on représente par

$$\frac{1}{r} = f(\theta)$$

l'équation de la trajectoire. Il vient alors

$$(\mathrm{I})\qquad V = k[-f'(\theta) + if(\theta)]\,\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

L'accélération Γ se déduit de V par la même méthode :

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2}\frac{dV}{d\theta},$$

et, en remplaçant $\frac{dV}{d\theta}$ par sa valeur déduite de (I),

$$(\mathrm{II})\qquad \Gamma = -\frac{k^2}{r^2}[f''(\theta) + f(\theta)]\,\mathrm{I}\,e^{i\theta}.$$

On calculerait de même les accélérations des divers ordres $\frac{d\Gamma}{dt}$, $\frac{d^2\Gamma}{dt^2}$, ...

Des formules (I) et (II) on déduit les conséquences connues :

1° La formule (I) montre que la vitesse a pour com-

posantes $-kf'(\theta)$ suivant OM, et $+kf(\theta)$ suivant la perpendiculaire à OM. La grandeur de la vitesse est donc

$$v = k\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)};$$

2° La formule (II) montre que l'accélération est dirigée suivant OM. L'*accélération est centrale*. La grandeur de cette accélération, comptée positivement de O vers M, est

$$\gamma = -\frac{k^2}{r^2}[f''(\theta)+f(\theta)].$$

Voilà, parmi tant d'autres, un exemple où la méthode du calcul géométrique peut rendre service à l'enseignement.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1895.

Composition de Mathématiques.

I. Étant donnés un plan et deux sphères S, S', de rayons R et R', ayant leurs centres dans ce plan, on considère une sphère variable, Σ, tangente aux deux premières et au plan. — On demande :

1° Le lieu géométrique du point de contact de la sphère Σ avec le plan donné;

2° Le lieu géométrique du centre de la sphère Σ.

II. On donne deux sphères de centres C, C', et un cône de révolution de sommet O, dont l'axe est perpendiculaire au plan COC'; le triangle COC' est rectangle en O. — On demande : 1° de former les équations du lieu des centres des sphères tangentes au cône et aux deux sphères données; 2° de discuter la nature de ce lieu dans le cas où le triangle rectangle COC' devient isoscèle, où les sphères données sont égales, et où, de plus, la sphère variable touche les sphères données toutes deux extérieurement, ou toutes deux intérieurement.

Épure.

On donne un cube de 16^{cm} de côté : sa face postérieure est dans le plan vertical; l'arête inférieure de cette face est sur une ligne parallèle aux petits côtés de la feuille, à $21^{cm},5$ du bord inférieur, et l'extrémité droite de cette arête est à $2^{cm},5$ du bord droit de la feuille. Une sphère est inscrite dans ce cube.

Un cône de révolution, tangent à la face inférieure du cube, a son sommet au centre de cette face, et son axe passe par le sommet antérieur de gauche de la face supérieure du cube.

On demande de représenter : 1° le solide commun au cône et à la sphère, en trait noir plein pour les parties vues, et en points noirs ronds pour les parties cachées : on indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque de l'intersection et des points remarquables, ainsi que celle des tangentes en ces points; 2° la projection en trait noir plein de la courbe d'intersection du cône et de la sphère sur un plan vertical parallèle à l'axe du cône et situé à $12^{cm},5$ du centre de la sphère.

Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 52725^{m},89, \qquad b = 45586^{m},54, \qquad C = 55^{\circ}43'27'',63.$$

Calculer le côté c, les deux angles A et B, et la surface.

Composition de Physique et Chimie.

Physique. — 1° Exposer la méthode générale des mélanges qui sert à mesurer la chaleur de fusion d'un corps qui est liquide à la température ordinaire. 2° Application de cette méthode à la mesure de la chaleur de fusion et de la chaleur spécifique de la glace.

Chimie. — Décrire la méthode de préparation de l'hydrogène à l'aide du flacon à deux tubulures. Indiquer les corps mentionnés au programme qui se préparent avec le même

appareil, en ne donnant pour tous ces corps (y compris l'hydrogène) que les formules de préparations.

Composition française.

L'indépendance absolue est une chimère : fût-elle réalisable, elle serait funeste : mais l'esprit d'indépendance est bon.

Développer ces trois points.

Composition de Langues vivantes.

Lorsque la nouvelle du retour de Colomb, après la découverte de l'Amérique, arriva en Espagne, l'attente fut universelle. Les *Rois,* comme on appelait Ferdinand et Isabelle, lui firent dire de venir les trouver à Barcelone.

Son voyage jusqu'à Barcelone fut une fête continuelle : toute la ville sortit à sa rencontre. Son cortège était celui d'un triomphateur antique : on portait devant lui les présents des chefs sauvages, l'or natif trouvé dans les rivières, et les produits divers de l'Amérique : six indiens des îles marchaient au milieu des Espagnols.

Colomb était à cheval entouré de l'élite de la noblesse d'Espagne.

Les *Rois* se levèrent au moment où il s'agenouilla en les abordant, et le firent asseoir à côté d'eux pour lui entendre raconter ce voyage dont les résultats étaient si grands.

Tel fut ce jour glorieux, attristé pour nous par la pensée de tout ce qu'eut depuis à souffrir celui qu'on honorait tant alors, et qui fut un des plus malheureux parmi les grands hommes, comme il fut un de ceux qui eurent le cœur le plus noble et le plus généreux.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Leçons synthétiques de Mécanique générale, servant d'Introduction au cours de Mécanique physique de la Faculté des Sciences de Paris, par M. *J. Boussinesq,* Membre de l'Institut. Publiées par les

soins de MM. *Legay* et *Vigneron*, élèves de la Faculté. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889. Gr. in-8° de XI-132 pages. Prix : 3fr,50.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, par *G. Salmon*, professeur à l'Université de Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais sur la 4e édition par *O. Chemin*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées. IIe Partie : THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES. COURBES GAUCHES ET SURFACES DÉVELOPPABLES. FAMILLES DE SURFACES. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de X-295 pages. Prix : 6fr.

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS, avec un exposé des méthodes de résolution, suivis des énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles Polytechnique, Normale, Centrale, au Concours général, à l'Agrégation, par *A. Rémond*, ancien élève de l'École Polytechnique, licencié ès Sciences, professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. Ire Partie : GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS, 2e édition. IIe Partie : GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS. PROBLÈMES GÉNÉRAUX. ÉNONCÉS. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. 2 vol. in-8° de VIII-335 pages et de 172-90 pages. Chaque Partie séparément : 7fr.

TRAITÉ D'ANALYSE, par *H. Laurent*, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Tome VII : CALCUL INTÉGRAL. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de 339 pages. Prix : 8fr,50.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES DE MESURE USITÉS EN PHYSIQUE, par *J. Pionchon*, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Gr. in-8° de 256 pages. Prix : 3fr,50.

ÉTUDES SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION, par *R. Radau*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Gr. in-8° de 96 pages. Prix : 2fr,50.

RECHERCHES RÉCENTES SUR DIVERSES QUESTIONS D'HYDRODYNAMIQUE. Exposé des travaux de von Helmholtz, Kirchhoff, Sir W. Thomson, lord Rayleigh, etc., par M. *Marcel Brillouin*, maître de conférences à l'École Normale supérieure. Ire Partie : TOURBILLONS. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de 44 pages. Prix : 2fr,50.

PHOTOGRAPHIE DES COULEURS PAR LA MÉTHODE INTERFÉRENTIELLE DE M. LIPPMANN, par *Alphonse Berget*, attaché au laboratoire des recherches physiques de la Sorbonne. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891. In-18 jésus de 58 pages. Prix : 1fr,50.

LEÇONS SUR L'ÉLECTRICITÉ ET LE MAGNÉTISME, par *P. Duhem*, chargé d'un cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie à la Faculté des Sciences de Lille. Tome I : LES CORPS CONDUCTEURS A L'ÉTAT PERMANENT. Tome II : LES AIMANTS ET LES CORPS DIÉLECTRIQUES. Tome III : LES COURANTS LINÉAIRES. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891-1892. 3 vol. gr. in-8° de VIII-560

pages, de 480 pages, de VI-528 pages. Chaque volume séparément : 16fr, 14fr et 15fr.

Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, par *H. Poincaré,* Membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences. Tome I : Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Gr. in-8° de 385 pages. Prix : 12fr.

Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-Logarithmal- und Numeralrechnung, von Dr *Julius Bergbohm.* Die rationalen algebraischen und die goniometrischen Integral. Leipzig, B.-G. Teubner; 1892. In-8° de VI-66 pages. Prix : 60 Pf.

Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial- Logarithmal- und Numeralrechnung, von Dr *Julius Bergbohm.* Stuttgart, Selbstverlag des Verfassers; 1892. In-8° de 58 pages. Prix : 60 Pf.

Les nouvelles bases de la Geométrie supérieure (Géométrie de position), par M. *Mouchot,* ancien professeur de l'Université, lauréat de l'Académie des Sciences. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-8° de VII-179 pages. Prix : 5fr.

Premières leçons d'Algèbre élémentaire : Nombres positifs et négatifs, opérations sur les polynômes, par M. *Henri Padé,* ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur agrégé de l'Université, avec une Préface de *Jules Tannery,* sous-directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-8° de XXIII-81 pages. Prix : 2fr,50.

Les Mathématiques aux Indes orientales, par M. *Léon Delbos,* professeur à l'École navale anglaise. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Gr. in-8° de 20 pages. Prix : 1fr.

Études theoriques et pratiques sur les levers topométriques et, en particulier, sur la Tachéométrie, par *C.-M. Goulier,* colonel du Génie en retraite. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-8° de XXII-542 pages. Prix : 20fr.

Leçons de Physique générale, par *James Chappuis,* agrégé, docteur ès Sciences, professeur de Physique générale à l'École Centrale des Arts et Manufactures, et *Alphonse Berget,* docteur ès Sciences, attaché au laboratoire des recherches physiques à la Sorbonne. Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures et complété suivant le programme de la Licence ès Sciences physiques. Tome III : Acoustique, Optique, Électro-optique. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Gr. in-8° de 396 pages. Prix : 10fr.

Les machines électriques a influence. Exposé complet de leur histoire et de leur théorie, suivi d'instructions pratiques sur la manière de les construire, par *John Gray,* associé de l'École royale des Mines, de l'Institut des ingénieurs électriciens, membre de la Société de Physique. Traduit de l'anglais et annoté par *Georges Pellissier,* rédacteur à la *Lumière électrique.* Paris,

Gauthier-Villars et fils; 1892. In-8° de IX-230 pages. Prix : 5fr.

Cours de Géométrie élémentaire, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux candidats à l'École Normale et à l'École Polytechnique, par *Ch. Vacquant,* ancien élève de l'École Normale, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, inspecteur général de l'Instruction publique. 4e édition, revue, corrigée et rendue conforme au programme du 24 juin 1891. Paris, G. Masson, 1892. In-8° de 752 pages. Prix : 8fr.

Éléments d'Algèbre à l'usage des élèves des classes de Lettres dans les lycées, par *Ch. Vacquant,* ancien élève de l'École Normale, ancien professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, inspecteur général de l'Instruction publique. 9e édition, revue, corrigée et rendue conforme aux programmes prescrits par les arrêtés du 28 janvier et du 12 août 1890. Paris, Ch. Delagrave; 1892. In-12 de 232 pages. Prix : 2fr, 50.

Cours d'Analyse professé à la Faculté des Sciences de Lille par M. *Demartres* et rédigé par M. E. Lemoine. Ire Partie : Fonctions de variables réelles. Paris, A. Hermann; 1892. Gr. in-4° de 192 pages. Prix : 10fr.

Méthode pour chiffrer et déchiffrer les dépêches secrètes, par *A. Hermann,* ancien élève de l'École Normale supérieure, libraire-éditeur. Paris, A. Hermann; 1892. Gr. in-12 avec 3 planches, règles et Cartes cryptographiques.

Méthode de transformation par projections obliques. Étude analytique à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par *A. Jullien.* Paris, A. Fourneau; 1892. In-16 de 29 pages. Prix : 1fr,50.

Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. 1re série, tome VII. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-4° de 446 pages. Prix : 25fr.

Œuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. *J.-A. Serret,* sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Tome XV et dernier. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de 346 pages. Prix : 20fr.

Cours d'Algèbre supérieure, par *Joseph Carnoy,* professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain. Principes de la théorie des déterminants; théorie des équations; introduction à la théorie des formes algébriques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Gr. in-8° de XII-537 pages. Prix : 11fr.

L'hyperespace a $n-1$ dimensions, propriétés géométriques de la corrélation générale, par *G. Fontené,* agrégé des Sciences mathématiques, professeur au collège Rollin. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Gr. in-8° de 133 pages. Prix : 5fr.

Bulles de savon, par *C.-V. Boys;* traduit de l'anglais par *Ch.*-

Ed. Guillaume. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. In-18 jésus de x-145 pages, avec 60 figures et 1 planche. Prix : 2fr,75.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, par *G. Salmon,* professeur à l'Université de Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais sur la 4e édition, par *O. Chemin,* ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées. IIIe Partie : SURFACES DÉRIVÉES DES QUADRIQUES. SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ. THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES. Paris, Gauthier-Villars et fils ; 1892. In-8° de VIII-220 pages. Prix : 4fr,50.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, par *Édouard Lucas.* Tome III : LE CALCUL DIGITAL. MACHINES ARITHMÉTIQUES. LE CAMÉLÉON. LES FONCTIONS DE POINTS. LE JEU MILITAIRE. LA PRISE DE LA BASTILLE. LA PATTE D'OIE. LE FER A CHEVAL. LE JEU AMÉRICAIN. AMUSEMENT PAR LES JETONS. L'ÉTOILE NATIONALE. ROUGE ET NOIRE. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Petit in-8° de VII-200 pages. Caractères elzévirs, titres en deux couleurs. Prix : Hollande, 9fr,50 ; vélin, 6fr,50.

LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, par M. *P. Sauvage,* professeur au lycée de Montpellier. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-8° de VI-113 pages, avec 47 figures dans le texte. Prix : 3fr.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, par *Jules Tannery,* sous-directeur des études à l'École Normale supérieure, et *Jules Molk,* professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome I : INTRODUCTION. CALCUL DIFFÉRENTIEL (Ire Partie). Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Gr. in-8° de x-246 pages, avec figures. Prix : 7fr,50.

ANNUAIRE POUR L'AN 1893, publié par le BUREAU DES LONGITUDES, contenant les Notices suivantes : *Sur l'observatoire du mont Blanc,* par J. JANSSEN. — *Sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique et la définition des unités électriques,* par A. CORNU. — *Discours sur l'Aéronautique, prononcé au Congrès des Sociétés savantes,* par J. JANSSEN. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Ossian Bonnet,* par F. TISSERAND. — *Discours prononcés aux funérailles de M. l'Amiral Mouchez,* par FAYE, BOUQUET DE LA GRYE et LŒWY. — *Discours prononce* par J. JANSSEN, *au nom du Bureau des Longitudes, à l'inauguration* de *la statue du Général Perrier, à Valleraugue* (*Gard*). Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. In-18 de V-868 pages, avec figures et 2 Cartes magnétiques. Prix : broché, 1fr,50; cartonné, 2fr.

INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, publié par la *Commission permanente du Répertoire.* Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893. Gr. in-8° de XIV-80 pages. Prix : 2fr.

ÉTUDE DES MODIFICATIONS APPORTÉES PAR LA ROTATION DIURNE DE

LA TERRE AUX LOIS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS PESANTS, par *L. Grillières,* colonel du Génie en retraite, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, Nony et Cie; 1893.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE, publiées sous les auspices de la Municipalité. Tome I : SUR LA DOUBLE RÉFRACTION DU QUARTZ, par M. *J. Macé de Lépinay;* SUR LE DADI-GO BALANCOUNFA, par M. *Édouard Heckel;* SUR UNE FONCTION ANALOGUE A LA FONCTION Θ, par M. *P. Appell;* SUR UNE THÉORIE DE STATIQUE, par M. *V. Jamet;* THÉORIE DE LA VISIBILITÉ ET DE L'ORIENTATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCE, par M. *Ch. Fabry.* Paris, G. Masson; 1892. In-4° de 158 pages, avec 3 planches en couleur. Prix : 6fr.

Tome II, 1er Fascicule : QUESTIONS DE COURS, par M. *L. Sauvage;* LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES NOMBRES INCOMMENSURABLES, par M. *E. Amigues.*

LEÇONS DE CINÉMATIQUE ET DE DYNAMIQUE, suivies de la détermination des centres de gravité, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par *X. Antomari,* ancien élève de l'École Normale, agrégé des Sciences mathématiques, professeur au lycée Henri IV. Paris, Nony et Cie; 1892. In-8° de VI-232 pages. Prix : 4fr.

LEZIONI DI ANALISI INFINITESIMALE, del prof. *G. Peano.* Volume I. Torino, tipografia editrice G. Candeletti; 1893. In-8° de VI-319 pages.

LEÇONS D'ALGÈBRE, par *Ch. Briot,* revues et mises au courant du nouveau programme par *E. Lacour,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Deuxième Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales. 16e édition, 1er Fascicule. Paris, Ch. Delagrave; 1893. Prix : 5fr.

COURS D'ALGÈBRE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique, par *B. Niewenglowski,* docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. 3e édition, t. I; 2e édition, t. II. Paris, Armand Colin; 1893 et 1891. 2 vol. in-8° de 385 et 510 pages. Prix : 12fr.

SUPPLÉMENT AU COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, comprenant la Trigonométrie et la Mécanique, conforme au programme du 14 mars 1892, par *G. de Longchamps,* professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Paris, Ch. Delagrave; 1893. In-8° de VI-472 pages. Prix : 7fr,50.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par *V. Jamet,* ancien élève de l'École Normale supérieure, docteur ès Sciences mathématiques, professeur au lycée de Marseille. Paris, Georges Carré; 1893. In-8° de 250 pages. Prix : 5fr.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'Enseignement clas-

sique (2ᵉ série) et au baccalauréat de l'Enseignement moderne (3ᵉ série), et des candidats à l'Institut agronomique, par *E. Carvallo*, professeur agrégé de l'Université, docteur ès Sciences mathématiques, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Paris, Nony et Cⁱᵉ; 1893. In-8° de III-154 pages. Prix : 2ᶠʳ,50.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des élèves de Mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'Enseignement classique (2ᵉ série) et au baccalauréat de l'Enseignement moderne (3ᵉ série), et des candidats à l'Institut agronomique, avec des COMPLÉMENTS destinés aux candidats aux grandes Écoles du Gouvernement, par *E. Humbert*, ancien élève de l'École Normale supérieure, agrégé des Sciences mathématiques, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand et une PRÉFACE de *Jules Tannery*, sous-directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure. Paris, Nony et Cⁱᵉ; 1893; In-8° de VIII-478 pages. Prix : 5ᶠʳ.

RECUEIL DE CALCULS LOGARITHMIQUES, à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux diverses Écoles du Gouvernement : Saint-Cyr, Navale, Centrale, Polytechnique, Mines, Ponts et Chaussées, etc., par *P. Barbarin*, ancien élève de l'École Normale supérieure, agrégé des Sciences mathématiques, professeur au lycée de Bordeaux. Paris. Nony et Cⁱᵉ; 1893. In-4° de 159 pages. Prix : 3ᶠʳ,50.

MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATICIENS, pensées et curiosités recueillies par *A. Rebière*. 2ᵉ édition, revue et augmentée. Paris, Nony et Cⁱᵉ; 1893. In 8° de II-566 pages. Prix : Hollande, 7ᶠʳ; ordin., 3ᶠʳ,50.

ÉTUDE DE STATIQUE PHYSIQUE.
CALCUL DES ACTIONS MUTUELLES DES SOLIDES EN CONTACT;

PAR M. LOUIS BOSSUT,
Capitaine du Génie.

---

1. *Hypothèses.* — Nous admettrons dans la suite que, lorsqu'une barre élastique de longueur L, de section transversale ω et de module d'élasticité E s'allonge d'une quantité λ sous l'action d'une force f dirigée suivant son axe longitudinal, on a la relation

$$f = \frac{E\omega}{L}\lambda \tag{1}$$

ou

(2) $$f = \mu\lambda,$$

en posant

(3) $$\mu = \frac{E\omega}{L}.$$

La forme (2) montre que le déplacement λ de l'extrémité libre de la barre est représenté par le même nombre que la vitesse λ que prendrait, sous l'action d'une percussion f, un point matériel de masse μ. Cette analogie nous permet de substituer à l'étude d'un allongement celle de la vitesse d'un point matériel; c'est de cette remarque que découle la simplicité de la méthode.

2. *Des barres élastiques situées dans un même plan forment un faisceau au sommet* S *duquel est appliquée une force* F. *Les extrémités distinctes des barres sont reliées à charnière à des corps fixes et l'on demande comment la force* F *se répartit le long des différentes barres dont on connaît d'ailleurs les masses fictives*

$$\mu = \frac{E\omega}{L}$$

qui varient d'une barre à l'autre.

Supposons le problème resolu et appelons $f_1, f_2, \ldots, f, \ldots, f_n$ les composantes cherchées. Sous l'action de l'une quelconque d'entre elles f_i par exemple, le sommet S se déplace suivant SA_i, d'une quantité λ_i donnée par la relation

(4) $$f_i = \mu_i\lambda_i,$$

et le déplacement réel du sommet S est la résultante de tous les déplacements analogues.

Prenons, sur chacune des directions émanant de S et à une distance quelconque de ce point, un point M et supposons tous ces points entraînés simultanément le long des barres sur lesquelles ils se trouvent, de telle sorte que le point M se déplace de λ, le point M_i de λ_i, ... Si nous affectons chacun de ces points de la masse μ afférente à la barre correspondante, nous voyons qu'à l'étude des déplacements composants du sommet S, nous pourrons substituer celle des déplacements des points M ou, ce qui revient au même, celle des vitesses initiales qui leur seraient communiquées dans la direction des barres sous l'action de la percussion F. Connaissant λ_i, la composante correspondante sera donnée par la relation (4).

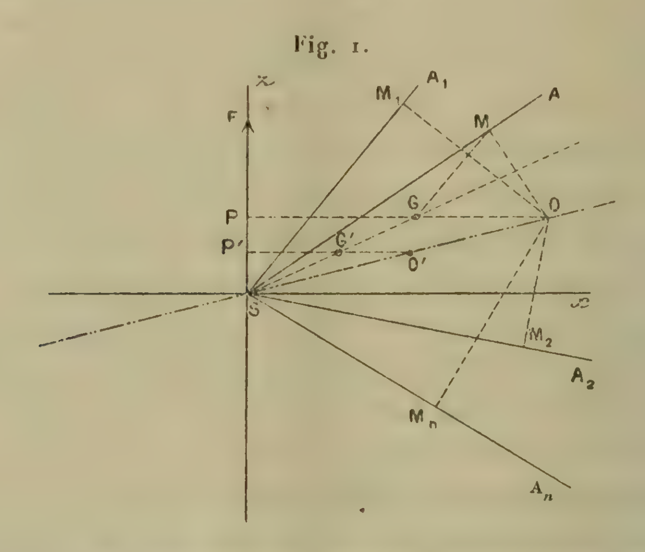
Lorsque les points M occupent des positions quelconques sur les barres, l'étude de leur mouvement initial est assez compliquée, car ils forment une figure déformable. Il en serait tout autrement si les distances de ces points deux à deux restaient invariables, car leur ensemble se déplacerait tout d'un bloc, à la façon d'un solide invariable; il semble donc tout naturel, puisqu'on dispose des distances des points au sommet S de chercher s'il existe un ensemble de points M_i formant une figure indéformable qui, soumise à l'action de la percussion F, acquerrait en chacun de ses points une vitesse dirigée suivant une direction connue SA_i.

Supposons le problème résolu et prenons pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires dont l'une Sz se confonde avec la ligne d'action de la force F.

Puisque l'ensemble des points M forme une figure invariable, son mouvement initial est une rotation instantanée autour d'un certain centre O; en outre, comme les vitesses doivent être dirigées suivant les rayons SA, les points M se confondent forcément avec

les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur ces rayons SA. Tout revient donc à déterminer le point O, ce à quoi l'on arrive bien simplement.

Fig. 1.



On sait, en effet, que le centre instantané se trouve sur la perpendiculaire OP abaissée du centre de gravité G de l'ensemble des points M, sur la direction de la force F et à une distance OG de ce point telle qu'on ait la relation

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{OG} \times \mathrm{GP} = \frac{\Sigma \mu \rho^2}{\Sigma \mu},$$

en appelant $\frac{\Sigma \mu \rho^2}{\Sigma \mu}$ le carré du rayon de gyration de l'ensemble des points par rapport à un axe perpendiculaire au tableau et passant par le centre de gravité. Donc, si l'on appelle α, γ les coordonnées du centre cherché et θ l'angle que fait, avec Sx, l'une quelconque des directions données et si l'on exprime analytiquement :

1° Que le centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les directions SA a même ordonnée que ce point O;

2° Que la relation (5) est satisfaite.

On trouve qu'il y a une infinité de centres O satisfaisant à la question, lesquels sont tous alignés sur la droite

$$(6) \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Sigma \mu \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \mu \cos^2\theta}.$$

Si l'on appelle p la distance OM et δ la longueur OP, on a, en général,

$$(7) \qquad f = \mu F \frac{p \times p}{\Sigma \mu p^2}.$$

La considération d'un autre centre O′ situé sur la droite (6) aurait conduit à la même valeur de f à cause de l'homologie des deux figures correspondantes.

3. *Conséquences des formules précédentes.* — La seule inspection des équations (6) et (7) conduit aux résultats suivants :

(a). Si l'on prolonge indéfiniment la ligne des centres instantanés, elle partage le plan en deux régions telles que les barres situées dans l'une travaillent à l'extension, tandis que celles qui sont situées dans l'autre sont comprimées.

(b). Lorsque le numérateur de (6) est nul, la ligne des centres instantanés est perpendiculaire à la direction de la force; par suite, la distance du point S au point instantané est constante, et le déplacement de ce sommet est un arc de cercle décrit autour du centre instantané.

(c). Lorsque les propriétés élastiques des différentes barres sont les mêmes, les relations de position des barres entre elles et avec la ligne d'action de la force interviennent seules pour modifier les valeurs des composantes dont l'expression générale peut s'écrire

$$(8) \qquad f = F \frac{\Sigma \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \cos^2\theta} \, \frac{\sin\theta \, \Sigma \cos^2\theta - \cos\theta \, \Sigma \sin\theta \cos\theta}{\Sigma \sin^2\theta \cos^2\theta - (\Sigma \sin\theta \cos\theta)^2}$$

ou

$$(9) \qquad f = \mathrm{F}\,\frac{\Sigma xz}{\Sigma x^2}\,\frac{z\Sigma x^2 - x\Sigma xz}{\Sigma x^2 z^2 - (\Sigma xz)^2},$$

en appelant x et z les coordonnées des points qui se trouvent sur chacune des directions SA à une distance de S égale à l'unité.

Les actions qui s'exercent suivant deux directions symétriques par rapport à la ligne des centres instantanés sont égales, et elles sont proportionnelles au cosinus de l'angle de la barre considérée avec la même ligne.

4. *Transmission des pressions dans les solides isotropes.* — Un solide isotrope est celui dont les propriétés élastiques sont les mêmes dans n'importe quelle direction autour de ses différents points; on peut donc le regarder comme formé d'une infinité de barres de même module de résistance, $\mu = 1$, émanant du point d'application de la force dont on étudie l'action. On suppose le corps limité par une surface plane et indéfini d'un côté de cette surface.

Premier cas. — *La force donnée* P *est normale à la surface du corps.*

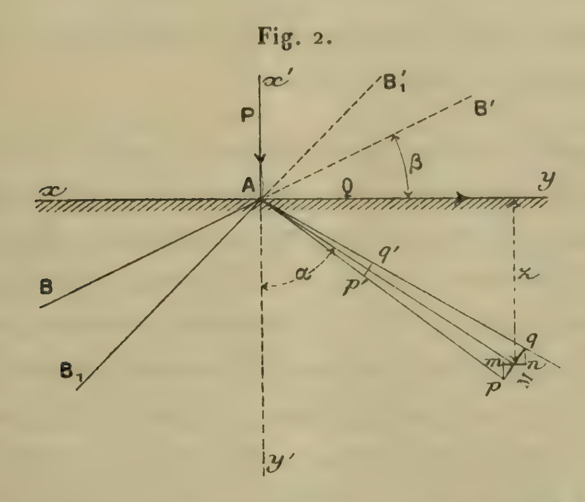
Par raison de symétrie, la résultante de toutes les actions qui s'exercent le long des barres situées dans un même plan vertical passant par F est constante; appelons-la p et appliquons les formules précédentes à l'un quelconque des faisceaux verticaux plans. Le centre instantané se trouve sur une droite perpendiculaire à P et la pression qui s'exerce le long d'une des barres sur l'unité de surface d'un élément $p'q'$, normal à la barre et situé à l'unité de distance de A, a pour expres-

sion

$$f_n = \frac{2p \cos\alpha}{\pi}. \tag{10}$$

Pour calculer p, on remarque que la projection sur

Fig. 2.



la verticale de toutes les forces f_n est égale à p, et l'on obtient ainsi

$$p = \frac{3P}{4}. \tag{11}$$

Enfin de f_n on tire la valeur de la pression qui s'exerce par unité de surface sur un élément mn, parallèle à la surface-limite et situé à la distance R du point d'application de la force, par la relation simple

$$f = f_n \frac{\cos\alpha}{R^2}, \tag{12}$$

qui découle de la considération de la figure ci-contre, dans laquelle on a $mn = 1$ et $AM = R$. En associant (10), (11) et (12), on trouve donc

$$f = \frac{3P \cos^2\alpha}{2\pi R^2} \tag{13}$$

et, en appelant z la profondeur de l'élément considéré

au-dessous de xy,

$$f = \frac{3P}{2\pi R^2} \times \frac{z^2}{R^2}. \tag{14}$$

C'est la formule donnée par M. Boussinesq ([1]).

Deuxième cas : *La force donnée Q agit tangentiellement à la surface limite.*

On ramène ce cas au précédent : pour cela prenons comme plan du tableau un plan vertical passant par Q et menons par A, point d'application de Q, un plan perpendiculaire à cette force. Supposons prolongées au delà du point A en AB′ ... les barres situées à gauche de ce plan : à une action suivant AB correspondrait, dans le faisceau AB′, une action égale et contraire ; par suite, on peut obtenir les valeurs absolues des actions cherchées, en substituant au solide idéal primitif un solide limité par le plan X′Y′ et auquel Q est perpendiculaire.

Donc, en appelant β l'angle de la direction considérée avec Q et α l'angle de cette même direction avec la trace $x'y'$, on aura pour valeur de l'action par unité de surface d'un élément parallèle à xy

$$f' = \frac{3Q}{2\pi R^2}\cos\alpha\cos\beta. \tag{15}$$

Troisième cas : *La force donnée a une direction quelconque par rapport à la surface limite.*

Ce cas résulte des deux précédents, puisqu'on peut décomposer la force en deux autres, l'une normale et

---

([1]) Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.* Gauthier-Villars ; 1885.

l'autre tangentielle, et appliquer la loi de la superposition des effets des petites forces; on trouve ainsi, en appelant V l'angle que fait la ligne d'action de la force donnée avec la direction que l'on considère,

$$(16) \qquad F = \frac{3P}{2\pi R^2} \frac{z}{R} \cos V.$$

Donc, en général :

Toute action extérieure exercée en un point de la surface d'un solide isotrope se transmet à l'intérieur, sur les couches parallèles à la surface limite, sous la forme de pressions dirigées exactement à l'opposé de ce point et qui égalent, pour l'unité d'aire, le produit du coefficient $\frac{3}{2\pi}$ *par la composante* $P \cos V$ *suivant leur propre sens de la force extérieure donnée par l'inverse du carré de la distance* R *au point d'application et par le rapport de la profondeur* z *de la couche à cette même distance* (Boussinesq, *loc. cit.*).

Nous n'insisterons pas davantage sur ces remarquables formules, notre but étant uniquement de montrer qu'on peut les obtenir par des considérations presque élémentaires, dont l'un des plus grands avantages consiste à faire voir pourquoi et comment s'introduisent les différents facteurs, ce que ne peut donner le calcul seul.

5. *Décomposition d'une force suivant les barres d'une gerbe.* — Ce problème se résout en déterminant les valeurs des composantes qui agiraient le long des barres des faisceaux plans obtenus en projetant sur trois plans coordonnés les barres de la gerbe et la force qui agit en son sommet.

6. *Une figure plane de forme quelconque, mais invariable, est soumise à l'action d'une force donnée* P *située dans son plan; elle repose sur les sommets* S_1, S_2, ..., S_n *de n faisceaux de barres élastiques toutes situées dans le plan de la figure et articulées à charnière avec des corps fixes, et l'on demande les actions qui s'exercent suivant les différentes barres.*

Des considérations analogues à celles du n° 2 montrent qu'il existe, dans le plan, une figure invariable de forme et une seule, composée de points matériels affectés de masses convenables, et telle que chacun de ses points prendrait, sous l'action d'une percussion P appliquée à leur ensemble, une vitesse dirigée suivant la barre correspondante et égale au déplacement composant du sommet situé sur cette barre. Le centre instantané O se trouve à l'intersection des deux droites

$$(17)\quad \begin{cases} \gamma\Sigma\mu k\cos^2\theta - \alpha\Sigma\mu k\sin\theta\cos\theta - \Sigma\mu k^2\cos^2\theta = 0, \\ \gamma\Sigma\mu\ \ \cos^2\theta - \alpha\Sigma\mu\ \ \sin\theta\cos\theta - \Sigma\mu k\ \ \cos^2\theta = 0. \end{cases}$$

Si l'on appelle p la distance du centre instantané O à une barre et $\mathfrak{M}_t$P le couple de rotation ; la composante suivant cette barre a pour valeur

$$(18)\qquad f = \mu p\,\frac{\mathfrak{M}_t P}{\Sigma\mu p^2}.$$

La pression qui supporte l'un des sommets est la résultante des actions f qui s'exercent le long des barres aboutissant à ce sommet.

Si, au lieu de se trouver dans un plan, les barres forment des gerbes dans l'espace, on traitera la même question au moyen de projections faites sur trois plans coordonnés.

7. *Étude d'un cas particulier très important.* — Le numéro précédent résout dans toute sa généralité le problème qui consiste à déterminer les pressions qu'un solide invariable exerce sur ses points d'appui, quand ceux-ci appartiennent à des solides élastiques naturels quelconques.

Si l'on veut dégager de la loi générale de répartition ainsi obtenue celle qui ne dépend que des positions relatives des points d'appui et des forces, il n'y a qu'à supposer que les propriétés élastiques des corps auxquels appartiennent ces points sont les mêmes pour chacun d'eux et quelle que soit la direction considérée.

En traitant sur ces nouvelles bases le problème du numéro précédent, on arrive à ce résultat remarquable, à savoir que :

Lorsqu'un solide invariable repose sur un ensemble de corps solides isotropes, les pressions qu'il exerce sur ses points d'appui sont égales aux quantités de mouvement que prendraient, à partir du repos et sous l'action d'une percussion égale à la force donnée, des points matériels de masses égales formant un solide invariable et se confondant à l'origine du mouvement avec les points d'appui.

L'énoncé précédent est encore vrai, lorsque les appuis appartiennent à des solides isotropes de nature différente, pourvu qu'on affecte de masses convenables les points matériels.

Ceci posé, on peut trouver facilement l'expression des composantes des pressions qui s'exercent sur chacun des appuis ; pour cela il n'y a qu'à étudier, suivant la méthode connue, le mouvement initial de l'ensemble des points.

On les rapporte à trois axes de coordonnées se con-

fondant avec leurs axes principaux d'inertie, et l'on étudie successivement l'influence de la percussion de translation et du couple de percussion qu'on peut substituer à la force donnée.

En désignant par ΣX, ΣY, ΣZ les composantes du système de forces donné, L, M, N les couples composants, enfin A, B, C les moments principaux d'inertie, on trouve, pour valeurs des composantes en un point x, y, z,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\Sigma X}{n} - y\frac{N}{C} + z\frac{M}{B},\\ \eta &= \frac{\Sigma Y}{n} - z\frac{L}{A} + x\frac{N}{C},\\ \zeta &= \frac{\Sigma Z}{n} - x\frac{M}{B} + y\frac{L}{A};\end{aligned}\right.$$

ou

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \mu\frac{\Sigma X}{\Sigma\mu} - \mu y\frac{N}{C} + \mu z\frac{M}{B},\\ \eta &= \mu\frac{\Sigma Y}{\Sigma\mu} - \mu z\frac{L}{A} + \mu x\frac{N}{C},\\ \zeta &= \mu\frac{\Sigma Z}{\Sigma\mu} - \mu x\frac{M}{B} + \mu y\frac{M}{B},\end{aligned}\right.$$

suivant que tous les appuis appartiennent à des corps de même nature ou à des corps qu'on doit caractériser par la masse fictive μ en vue de faire intervenir leurs propriétés élastiques.

On sait que le travail produit par une force T agissant sur un corps élastique a pour expression $\frac{1}{2\mu}T^2$; si l'on calcule la somme des travaux des pressions sur les points d'appui, on trouve, dans le cas, par exemple, où $\mu = 1$ pour tous les points,

$$(21)\qquad \sum \frac{1}{2\mu}T^2 = \frac{\Sigma R^2}{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right).$$

Cette expression satisfait au principe du travail minimum, principe qui s'énonce ainsi :

Quand un système élastique quelconque se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé dans l'extension ou la compression des liens ou des points d'appui, par suite des déplacements relatifs des points du système; ou, en d'autres termes, le travail développé par des forces intérieures est un minimum.

L'expression (21) démontre encore ce théorème important :

Le travail total produit pendant la déformation est le même pour tous les systèmes d'appui ayant mêmes axes principaux d'inertie et mêmes moments principaux d'inertie.

8. *Pressions sur des surfaces d'appui.* — Si, au lieu d'être isolés, les points d'appui forment des surfaces continues, la question se traite aussi simplement et les formules obtenues sont complètement analogues à (19) et (20). Elles montrent immédiatement, et entre autres choses, que, lorsque tous les corps ont même constante d'isotropie qu'on peut prendre égale à l'unité :

1° Si le système de forces donné se réduit à une force unique, passant par le centre de gravité de toutes les surfaces, les pressions résultantes sur chacune d'elles sont proportionnelles à leur aire et passent par les centres de gravité de celles-ci;

2° Si, le système de forces étant quelconque, la surface d'appui considérée a même centre de gravité et mêmes axes principaux d'inertie que l'ensemble des surfaces, la résultante de translation des pressions qu'elle supporte est proportionnelle à son aire; quant

aux couples résultants, ils ont pour expressions, en appelant A', B', C' les moments principaux d'inertie de la surface considérée,

$$(22) \qquad L' = L\frac{A'}{A}, \qquad M' = M\frac{B'}{B}, \qquad N' = N\frac{C'}{C}.$$

9. *Discussion des formules en* ξ, η, ζ (20) *et* (21). — Nous n'exposerons pas cette question que le lecteur traitera lui-même; nous voulons seulement faire remarquer qu'on arrive facilement au but en substituant une discussion géométrique à celle des formules en ξ, η, ζ.

On remarque, en effet, que, d'après ce qui a été dit n° 7, la pression en un point est la résultante d'une composante de translation, la même en tous les points par unité de masse, et d'une autre force, composante de rotation, tendant à faire tourner le point autour d'un axe instantané conjugué, dans l'ellipsoïde central des *n* points, du plan du couple de percussion, cette force étant proportionnelle à la distance du point à l'axe et à la masse.

Ceci posé, on voit immédiatement que :

1° Les lignes d'action des pressions agissant sur des points situés sur une circonférence perpendiculaire à l'axe instantané appartiennent à un hyperboloïde à une nappe qui est de révolution lorsque cet axe se confond avec la résultante de translation du système de forces donné ;

2° La condition nécessaire pour que la pression exercée sur certains points soit nulle est que l'axe instantané et la résultante de translation soient rectangulaires; alors les points se trouvent alignés sur une droite parallèle à l'axe instantané et située dans un plan perpendiculaire à la résultante de translation et à une

distance de l'axe, telle qu'on a

$$f_t = p\omega,$$

f_t étant la composante de translation, p la distance à l'axe et ω la vitesse angulaire.

3° Sur une droite donnée de l'espace, il ne peut y avoir plus d'un point pour lequel la pression soit parallèle à une direction donnée.

4° En supposant les points dans un plan, on retrouve toutes les théories connues du noyau central et des lois de répartition des pressions données dans tous les cours de Résistance des matériaux; nous n'insistons donc pas davantage là-dessus.

10. *Où l'on expose des vues nouvelles à propos du solide invariable.* — On donne, en Mécanique rationnelle, le nom de *solide invariable* à un ensemble de points matériels dont les distances sont invariables; c'est là une conception géométrique simple, mais est-ce bien celle qui résulte des considérations primitives qui l'ont fait éclore? Évidemment non.

Quand on a commencé à étudier l'action des forces sur les solides, on a remarqué que celles-ci produisaient deux genres d'action : une déformation passagère ou permanente et un mouvement; on a eu alors l'idée de simplifier les recherches en étudiant ce qui se passerait s'il n'y avait pas de déformation, c'est-à-dire si la rigidité du solide naturel devenait infinie. Le solide invariable s'est donc introduit comme limite de solides fictifs de moins en moins déformables, et c'est pour avoir perdu de vue ce point de départ qu'on est arrivé à dire, par exemple, que la répartition des pressions sur un certain nombre d'appuis est un problème indéterminé. Si l'on considère les appuis comme des corps géométriques, le

problème ne peut évidemment avoir de solution déterminée et du reste, dans ce cas, il semble absolument inutile de le poser, car une pression étant une force, c'est-à-dire une cause de mouvement, si, *a priori*, on suppose qu'aucun mouvement ne peut se produire, à quoi bon chercher la cause d'un phénomène qui ne peut se réaliser ?

Au contraire, du moment qu'on évalue, ainsi que le recommande Lagrange, les forces soit par le mouvement qu'elles communiquent à un point matériel, soit par celui qu'elles lui communiqueraient s'il pouvait se mouvoir, et que l'on considère les solides comme des corps déformables, tout se simplifie et la question, renfermant les données rationnelles qu'elle doit fournir, a une solution unique et déterminée.

Les formules et les résultats que nous avons obtenus fournissent cette solution. Mais on peut se demander quelle est la série des solides naturels dont le solide invariable doit être la limite, pour que l'on retrouve les résultats que fournit la statique rationnelle et ses six équations d'équilibre qui ne tiennent compte que des relations géométriques de position et des valeurs des forces. La réponse semble intuitive, car, si l'on suppose que les propriétés élastiques sont les mêmes en tous les points, elles ne produiront aucune différence dans l'action des forces; nous allons le montrer dans un cas simple, celui de la décomposition d'une force donnée en deux autres parallèles passant par deux points donnés.

Si l'on appelle μ_a et μ_b les masses positives qui caractérisent les propriétés élastiques des corps auxquels appartiennent les points A et B, et λ la distance du point d'application M de la force P au centre de gravité des points μ_a et μ_b, enfin l la distance AB, on trouve,

en appliquant à ce cas particulier les formules (20),

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi_a = 0, \qquad \eta_a = 0; \qquad \xi_b = 0, \qquad \eta_b = 0,\\
&\zeta_a = \mu_a \frac{P}{\mu_a + \mu_b} - \mu_a . AG \frac{P\lambda}{\mu_a . \overline{AG}^2 + \mu_b . \overline{BG}^2},\\
&\zeta_b = \mu_b \frac{P}{\mu_a + \mu_b} + \mu_b . BG \frac{P\lambda}{\mu_a . \overline{AG}^2 + \mu_b . \overline{BG}^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on compare les valeurs (23) aux suivantes, que donnent les équations d'équilibre,

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\zeta'_a = P\frac{MB}{AB} = \frac{P}{l}\left(\frac{l}{2} - \lambda\right),\\
&\zeta'_b = P\frac{MA}{AB} = \frac{P}{l}\left(\frac{l}{2} + \lambda\right),
\end{aligned}
\right.
$$

on voit que, quelles que soient les valeurs de μ_a et μ_b, les valeurs seront différentes des secondes tant que l'on n'aura pas

$$\mu_a = \mu_b.$$

Il semble donc qu'on peut énoncer ce principe que :

La considération d'un solide invariable limite d'un corps naturel dont la rigidité augmenterait indéfiniment tandis qu'en chacun de ses points les propriétés élastiques restent les mêmes dans toutes les directions donne la valeur des pressions en chaque point, ou en d'autres termes :

Les pressions qu'un solide invariable exerce sur ses points d'appui sont, dans le cas où les propriétés élastiques des appuis sont les mêmes, égales aux forces motrices initiales qui mettraient en mouvement chacun de ces points, si leur ensemble était entraîné, à partir du repos, par le système de forces donné et à la façon d'un solide invariable.

Nous limitons ce résumé à ce qui a trait à la partie

absolument théorique, qui seule peut trouver place ici; mais nous devons faire remarquer que la théorie que nous venons d'exposer nous a permis de montrer que l'indétermination n'existe dans aucune des questions de la pratique, par exemple dans celle qui a trait à la détermination du point d'application de la poussée dans les voûtes, dont la solution est immédiate.

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TANGENTIELLES;

Par M. BALITRAND,
Lieutenant du Génie.

Il arrive souvent que l'équation tangentielle d'une courbe est simple et facile à obtenir, tandis que l'équation ponctuelle de la même courbe est difficile à trouver et, en outre, compliquée. Il est commode alors d'avoir des formules qui permettent d'étudier directement sur l'équation tangentielle les propriétés de la courbe; ce sont ces formules que nous voulons obtenir pour en faire ensuite quelques applications.

Une droite étant définie par l'équation

$$ux + vy - 1 = 0,$$

les coordonnées tangentielles ordinaires de cette droite sont les quantités u et v; c'est-à-dire les inverses des segments qu'elle détermine à partir de l'origine sur les axes de coordonnées. Mais à cette équation, nous substituerons le plus souvent l'équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - 1 = 0,$$

et aux coordonnées u et v, les coordonnées p et φ, que

nous appellerons *coordonnées tangentielles polaires*, ou, par abréviation et quand il ne saurait y avoir d'erreur, *coordonnées polaires*.

D'ailleurs, on passe des premières aux secondes par les formules

$$(1) \qquad u = \frac{\cos\varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin\varphi}{p},$$

et, inversement, l'on passe des coordonnées polaires aux coordonnées ordinaires au moyen des formules

$$(1') \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{v}{u}, \qquad p^2 = \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Il est impossible de ne pas remarquer l'analogie de ces formules avec celles qui permettent de passer des coordonnées rectangulaires (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ), et réciproquement,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}, \qquad r^2 = x^2+y^2.$$

On peut considérer les coordonnées tangentielles polaires à un autre point de vue. Ce ne sont, en effet, autre chose que les coordonnées polaires ordinaires de la podaire de la courbe enveloppée par la droite

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

A toute équation

$$f(p, \varphi) = 0$$

correspondent donc deux courbes, suivant que l'on considère p et φ comme des coordonnées polaires ordinaires ou comme des coordonnées tangentielles polaires.

FORMULES FONDAMENTALES.

Notations. — Soient

u et v les conditions tangentielles ordinaires d'une droite Δ qui enveloppe une courbe C ;

p et φ les coordonnées tangentielles polaires de Δ, ou les coordonnées polaires de la podaire de la courbe C;

x et y les coordonnées du point M où Δ touche son enveloppe;

r et θ les coordonnées polaires du point M;

ds l'élément de la courbe enveloppe;

ε l'angle de deux positions infiniment voisines de Δ, c'est-à-dire l'angle de contingence de la courbe C au point M;

ρ le rayon de courbure de la courbe C au point M.

Les coordonnées du point où la droite Δ touche son enveloppe sont données par les deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} ux + vy - 1 = 0, \\ x\,du + y\,dv = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \qquad y = \frac{-du}{u\,dv - v\,du};$$

de ces équations l'on déduit

$$dx = \frac{v(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}, \qquad dy = \frac{-u(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2},$$

et, par suite,

$$(4)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)\sqrt{u^2 + v^2}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'angle ε se calcule aisément, et l'on trouve

$$(5)\qquad \varepsilon = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}.$$

Les deux dernières formules donnent alors

$$(6)\qquad \rho = \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^3}.$$

Coordonnées polaires. — Il est aisé de passer des formules que nous venons d'établir aux mêmes formules en coordonnées polaires. En effet, des relations

$$u = \frac{\cos\varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin\varphi}{p},$$

on déduit, en supposant que φ est la variable indépendante

$$u' = -\frac{p\sin\varphi + p'\cos\varphi}{p^2},$$

$$v' = -\frac{p\cos\varphi - p'\sin\varphi}{p^2},$$

$$u'' = -\frac{(p^2 + pp'' - 2p'^2)\cos\varphi - 2pp'\sin\varphi}{p^3},$$

$$v'' = -\frac{(p^2 + pp'' - 2p'^2)\sin\varphi + 2pp'\cos\varphi}{p^3}.$$

On a alors

$$u\frac{dv}{d\varphi} - v\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{p^2},$$

$$\frac{dv}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi}\frac{d^2v}{d\varphi^2} = -\frac{p + p''}{p^3},$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{p},$$

et, par suite, on arrive aux formules très simples

(7) $$\rho = -(p + p''),$$

(8) $$ds = \rho\varepsilon = -(p + p'')\,d\varphi.$$

Enfin les expressions (3) donnent

(9) $$\begin{cases} x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \\ p = y\sin\varphi - p'\cos\varphi, \end{cases}$$

puis

(10) $$\begin{cases} x' = -(p + p'')\sin\varphi, \\ y' = (p + p'')\cos\varphi, \\ x'' = -(p' + p''')\sin\varphi - (p + p'')\cos\varphi, \\ y'' = (p' + p''')\cos\varphi - (p + p'')\sin\varphi. \end{cases}$$

Les formules classiques pour calculer le rayon de courbure ρ et les coordonnées α et β du centre de courbure

$$\rho = \frac{(x'^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''},$$

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \qquad y - \beta = \frac{-x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

donnent alors

(7) $$\rho = -(p + p''),$$

(11) $$\begin{cases} \alpha = -p' \sin\varphi - p'' \cos\varphi, \\ \beta = \quad p' \cos\varphi - p'' \sin\varphi. \end{cases}$$

Ces dernières formules peuvent s'obtenir directement d'une façon très simple. En effet, l'équation générale des cercles en coordonnées tangentielles ordinaires est

$$\rho^2 = \frac{(u\alpha + v\beta - 1)^2}{u^2 + v^2};$$

en coordonnées tangentielles polaires, elle prend la forme très simple

$$\rho = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - p,$$

qui, différentiée deux fois, donne

$$-\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi - p' = 0,$$
$$-\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi - p'' = 0,$$

d'où l'on déduit les relations (7) et (11).

Remarque I. — Dans ce qui précède, nous avons supposé que φ était la variable indépendante, mais rien n'empêche de prendre p comme variable; les formules s'établissent tout aussi simplement. Les coordonnées du point de contact de la droite Δ et de son enve-

loppe sont déterminées par les deux équations

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0,$$

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi - \frac{1}{\varphi'} = 0,$$

qui donnent

$$x = p \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi'},$$

$$y = p \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\varphi'}.$$

Pour obtenir la valeur du rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure de la courbe au point de contact, nous partirons de l'équation générale des cercles

$$p = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - \rho,$$

qui, différentiée deux fois, donne

$$\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi + \frac{1}{\varphi'} = 0,$$

$$\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - \frac{\varphi''}{\varphi'^3} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\varphi'}\left(\cos\varphi \dfrac{\varphi''}{\varphi'^2} - \sin\varphi\right), \\ \beta = \dfrac{1}{\varphi'}\left(\sin\varphi \dfrac{\varphi''}{\varphi'^2} + \cos\varphi\right), \\ \rho = -p + \dfrac{\varphi''}{\varphi'^3}. \end{cases}$$

Remarque II. — Les formules (10) peuvent s'écrire

$$x' = \rho \sin\varphi, \qquad y' = -\rho \cos\varphi$$

et fournissent une interprétation géométrique évidente des quantités x' et y'.

Remarque III. — La quantité p' peut aussi s'interpréter géométriquement. Ce n'est autre chose que la

distance PM, du pied P de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur Δ, au point M où la droite Δ touche son enveloppe.

Cette remarque permet d'obtenir l'équation qui donne les longueurs des tangentes menées d'un point (x, y) à une courbe. En effet, soit

$$p = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

l'équation du point, et

$$f(p, \varphi) = 0$$

l'équation de la courbe. On en déduit

$$f'_p p' + f'_\varphi = 0,$$

et, en éliminant p et φ entre ces trois équations, on obtient une équation en p' qui est l'équation cherchée.

APPLICATIONS.

Application aux courbes algébriques. — L'équation générale des courbes algébriques de classe m s'écrit, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(13) \qquad a_0 + \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) + \ldots + \varphi_m(u, v) = 0,$$

$\varphi_p(u, v)$ désignant un polynôme homogène et de degré p en u et v.

En coordonnées tangentielles polaires, cette équation s'écrit

$$a_0 + \varphi_1\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \varphi_2\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \ldots + \varphi_m\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) = 0$$

ou développée

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} & a_0 p^m + p^{m-1}(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) \\ & \quad + p^{m-2}(a_2 \cos^2\varphi + b_2 \cos\varphi \sin\varphi + c_2 \sin^2\varphi) + \ldots \\ & \quad + a_m \cos^m\varphi + b_m \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi + \ldots \\ & \qquad\qquad + k_m \cos\varphi \sin^{m-1}\varphi + l_m \sin^m\varphi = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, dans l'équation (14), nous assignons à φ une valeur déterminée, cette équation a pour racines les distances de l'origine aux tangentes parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Cette équation donne

$$\Sigma p = -\frac{a_1}{a_0} \cos\varphi - \frac{b_1}{a_0} \sin\varphi.$$

On en déduit

$$\Sigma p' = \frac{a_1}{a_0} \sin\varphi - \frac{b_1}{a_0} \cos\varphi,$$

$$\Sigma p'' = \frac{a_1}{a_0} \cos\varphi + \frac{b_1}{a_0} \sin\varphi$$

et, par suite,

$$\Sigma p + \Sigma p'' = \Sigma(p + p'') = 0;$$

d'où ce théorème, dû, croyons-nous, à Duhamel :

Théorème. — *Si l'on mène à une courbe algébrique de classe m les tangentes parallèles à une direction Δ, la somme des rayons de courbure aux points de contact est nulle.*

Des formules (9) on déduit ensuite

$$\begin{aligned} \Sigma x &= \Sigma p \cos\varphi - \Sigma p' \sin\varphi \\ &= -\frac{a_1}{a_0} \cos^2\varphi - \frac{b_1}{a_0} \cos\varphi \sin\varphi - \frac{a_1}{a_0} \sin^2\varphi + \frac{b_1}{a_0} \cos\varphi \sin\varphi, \end{aligned}$$

$$\Sigma x = -\frac{a_1}{a_0},$$

de même

$$\Sigma y = -\frac{b_1}{a_0}.$$

Théorème (Chasles). — *Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une direction Δ reste fixe quand Δ varie.*

Les formules (11) donnent de même

$$\Sigma\alpha = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\Sigma\beta = -\frac{b_1}{a_0},$$

et, si l'on appelle α_n et β_n les coordonnées du centre de courbure d'ordre n, on a également

$$\Sigma\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\Sigma\beta_n = -\frac{b_1}{a_0}.$$

Théorème. — *Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une direction coïncide avec le centre des moyennes distances des centres de courbure aux points de contact, et plus généralement avec le centre des moyennes distances des centres de courbure d'ordre n correspondant aux points de contact.*

Le point $\left(\Sigma x = -\frac{a_1}{a_0},\ \Sigma y = -\frac{b_1}{a_0}\right)$, ou point de Chasles, disparaît si a_0 devient nul, c'est-à-dire si la courbe est tangente à la droite de l'infini. Son équation

$$a_0 p + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi = 0$$

ne dépend que du terme constant et des termes du premier degré de l'équation

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi_m(u, v) + \varphi_{m-1}(u, v) + \ldots \\ &\quad + \varphi_1(u, v) + a_0 = f_m(u, v) = 0. \end{aligned}\right.$$

Il reste donc le même pour une foule de courbes liées à la courbe (13), et en particulier pour toutes les courbes homofocales à la courbe (13). En effet, l'équation générale de ces courbes est

$$f_m(u, v) + (u^2 + v^2)\,F_{m-2}(u, v) = 0,$$

F_{m-2} désignant un polynôme homogène et de degré $m - 2$ qui, décomposé en groupes homogènes, s'écrit

$$F_{m-2}(u, v) = \psi_{m-2}(u, v) + \psi_{m-3}(u, v) + \ldots + \psi_1(u, v) + \psi_0.$$

En coordonnées tangentielles polaires, l'avant-dernière équation s'écrit

$$f_m\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) + \frac{1}{p^2}\,F_{m-2}\left(\frac{\cos\varphi}{p}, \frac{\sin\varphi}{p}\right) = 0,$$

ou développée

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &a_0 p^m + p^{m-1}\varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\\ &\quad + p^{m-2}[\varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) + \psi_0] + \ldots\\ &\quad + p[\varphi_{m-1}(\cos\varphi, \sin\varphi) + \psi_{m-3}(\cos\varphi, \sin\varphi)]\\ &\qquad + \varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) + \psi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation nous montre que le point de Chasles est le même pour la courbe (15) que pour la courbe (13), quels que soient les polynômes ψ.

Théorème. — *Le point de Chasles d'une courbe* C *de classe m reste le même pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C.

On peut encore démontrer directement et de la façon la plus simple le théorème suivant :

Le point de Chasles coïncide avec le centre des moyennes distances des m foyers réels de la courbe (13).

En effet, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ sont les coordonnées de m foyers réels, l'équation (13) peut se

mettre sous la forme

$$(ux_1+vy_1-1)(ux_2+vy_2-1)\ldots(ux_m+vy_m-1) \\ +(u^2+v^2)F_{m-2}(u,v)=0,$$

puisque c'est l'équation générale des courbes de classe m, qui ont pour foyers réels les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m) et sous cette forme la proposition est évidente.

L'équation (15) peut conduire à d'autres conséquences intéressantes.

En effet, si dans l'équation (14) nous faisons $p=0$, nous obtenons l'équation

$$(14') \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ &\quad = a_m \cos^m\varphi + b_m \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi + \ldots \\ &\qquad k_m \cos\varphi \sin^{m-1}\varphi + l_m \sin^m\varphi = 0, \end{aligned} \right.$$

qui nous donne les valeurs de φ pour les tangentes à la courbe C issues de l'origine.

Faisons de même $p=0$ dans l'équation (15), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) + \psi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ &\quad = a_m \cos^m\varphi + b_m \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi + \ldots \\ &\qquad + k_m \cos\varphi \sin^{m-1}\varphi + l_m \sin^m\varphi \\ &\qquad + a'_{m-2} \cos^{m-2}\varphi + b'_{m-2} \cos^{m-3}\varphi \sin\varphi + \ldots \\ &\qquad\qquad + k'_{m-2} \cos\varphi \sin^{m-3}\varphi + l'_{m-2} \sin^{m-2}\varphi = 0. \end{aligned}$$

Pour rendre cette dernière équation homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, il nous suffit de multiplier par

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

et nous obtenons alors

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a_m + a'_{m-2}) \cos^m\varphi + (b_m + b'_{m-2}) \cos^{m-1}\varphi \sin\varphi \\ &\quad + (c_m + c'_{m-2} + a'_{m-2}) \cos^{m-2}\varphi \sin^2\varphi + \ldots \\ &\quad + (f_m + f'_{m-2} + l'_{m-2}) \cos^2\varphi \sin^{m-2}\varphi \\ &\quad + (k_m + k'_{m-2}) \cos\varphi \sin^{m-1}\varphi + (l_m + l'_{m-2}) \sin^m\varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ les racines de cette équa-

tion; ce sont les angles que font avec Ox les tangentes à la courbe (15) issues de l'origine.

On a, d'après une formule bien connue,

$$\begin{aligned}&\text{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)\\&=\frac{\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1-\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\,\text{tang}\,\varphi_3+\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\ldots\text{tang}\,\varphi_5-\ldots}{1-\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2+\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\,\text{tang}\,\varphi_3\,\text{tang}\,\varphi_4-\ldots}.\end{aligned}$$

Or l'équation (16) donne

$$\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1=\frac{k_m+k'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2=\frac{f_m+f'_{m-2}+l'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\,\text{tang}\,\varphi_3=\frac{i_m+i'_{m-2}+k'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\,\text{tang}\,\varphi_3\,\text{tang}\,\varphi_4=\frac{h_m+h'_{m-2}+j'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

$$\Sigma\,\text{tang}\,\varphi_1\,\text{tang}\,\varphi_2\,\text{tang}\,\varphi_3\,\text{tang}\,\varphi_4\,\text{tang}\,\varphi_5=\frac{g_m+g'_{m-2}+i'_{m-2}}{l_m+l'_{m-2}},$$

. . . .

Par suite

$$\begin{aligned}&\text{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)\\&=\frac{k_m+k'_{m-2}-(i_m+i'_{m-2}+k'_{m-2})+(g_m+g'_{m-2}+i'_{m-2})-\ldots}{l_m+l'_{m-2}-(j_m+j'_{m-2}+l'_{m-2})+(h_m+h'_{m-2}+j'_{m-2})-\ldots},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)=\frac{k_m-i_m+g_m-\ldots}{l_m-j_m+h_m-\ldots},$$

C'est le même résultat que si l'on avait calculé $\text{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m)$ au moyen de l'équation (14'). D'où ce théorème :

Théorème. — *Si, par un point* O, *l'on mène les tangentes à une courbe* C *de classe m, la somme des angles que font ces tangentes avec un axe fixe reste constante pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C. *En particulier, cette somme est égale à celle*

que fait avec le même axe les droites qui joignent le point O *aux m foyers réels de la courbe* C.

Ce théorème n'est qu'une généralisation d'une propriété bien connue des sections coniques : *Les couples de tangentes menées d'un point fixe à un système de coniques homofocales admettent les mêmes bissectrices.*

Propriété qui n'est elle-même qu'une extension du théorème suivant :

Les tangentes menées à une conique à centre par un point fixe sont également inclinées sur les droites qui joignent ce point aux foyers.

Nous venons de voir que les angles que font avec l'axe des x les tangentes à la courbe issues de l'origine sont données par l'équation

$$\varphi_m(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0. \tag{17}$$

Les longueurs de ces tangentes s'obtiennent par la formule

$$p' = -\frac{\varphi'_m}{\varphi_{m-1}},$$

où il faut remplacer φ par les m racines de l'équation (17). Cette relation a été obtenue en différentiant l'équation (14) et en y faisant ensuite $p = 0$.

La valeur du rayon de courbure au point de contact de l'une des tangentes issues de l'origine est égale, en vertu de la formule (7), à $-p''$, puisque $p = 0$. L'équation qui donne les valeurs du rayon de courbure pour les points de contact des m tangentes issus de l'origine est alors

$$p'' = -\frac{2\varphi'^2_m \varphi_{m-2}}{\varphi^3_{m-1}} + \frac{2\varphi'_m \varphi'_{m-1}}{\varphi^2_{m-1}} - \frac{\varphi''_m}{\varphi_{m-1}},$$

où l'on doit remplacer φ successivement par les m racines de l'équation (17).

Enfin, l'on peut observer que, pour avoir les tangentes communes à la courbe (14) et à un cercle qu'on peut supposer avoir son centre à l'origine, il suffit de donner à p, dans l'équation (14), une valeur déterminée.

Les remarques précédentes peuvent servir à établir certaines propriétés des courbes algébriques, mais nous ne nous y arrêterons pas.

Revenons à la formule

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = -\frac{a_1}{a_0}\cos\varphi - \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi.$$

Nous savons que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont les distances de l'origine aux tangentes à la courbe (14) parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

Posons

$$(18) \qquad mp = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = -\frac{a_1}{a_0}\cos\varphi - \frac{b_1}{a_0}\sin\varphi;$$

p et φ sont alors les coordonnées polaires du centre des moyennes distances des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à la courbe (14), parallèles à la direction $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

En passant aux coordonnées rectangulaires, l'équation précédente devient

$$ma_0(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle. Le point diamétralement opposé à l'origine est précisément le point de Chasles. Comme l'équation du cercle ne dépend que du terme constant et des termes du premier degré de l'équation (13), elle reste la même pour toutes les courbes ho-

mofocales à la courbe (13). On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère une courbe algébrique* C, *et si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* $OA_1, OA_2, \ldots, OA_m$ *sur les tangentes à la courbe parallèles à une direction* Δ, *le lieu du centre des moyennes distances des points* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *quand* Δ *varie, est une circonférence qui reste la même pour toutes les courbes homofocales à la courbe* C.

Ce théorème n'est que l'extension aux courbes algébriques d'une propriété du cercle que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Considérons un cercle C *et un point* O; *menons au cercle deux tangentes parallèles, et abaissons du point* O *les perpendiculaires* OA_1, OA_2 *sur ces tangentes. Le milieu du segment* A_1A_2 *décrit une circonférence qui reste la même pour tous les cercles concentriques au cercle* C.

De la relation (18) on déduit

$$(\Sigma p_1)^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \cos^2\varphi - \frac{2a_1b_1}{a_0^2}\cos\varphi\sin\varphi + \left(\frac{b_1}{a_0}\right)^2 \sin^2\varphi,$$

et, par suite, l'équation (14) donnant

$$\Sigma p_1p_2 = \frac{a_2}{a_0}\cos^2\varphi + \frac{b_2}{a_2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{c_2}{a_0}\sin^2\varphi,$$

on a

$$\begin{aligned}\Sigma p_1^2 &= (\Sigma p_1)^2 - 2\Sigma p_1p_2\\ &= \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}\cos^2\varphi + 2\,\frac{a_1b_1 - a_0b_2}{a_0^2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{b_1^2 - 2a_0c_2}{a_1^2}\sin^2\varphi\\ &= \text{A}\cos^2\varphi + 2\text{B}\cos\varphi\sin\varphi + \text{C}\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

En posant

$$mp^2 = \Sigma p_1^2 = \text{A}\cos^2\varphi + 2\text{B}\cos\varphi\sin\varphi + \text{C}\sin^2\varphi,$$

le point qui a pour coordonnées polaires p et φ décrit une courbe qui en coordonnées rectangulaires a pour équation

$$m(x^2+y^2)^2 - Ax^2 - 2Bxy - Cy^2 = 0.$$

Cette courbe n'est autre chose que la podaire de l'origine par rapport à la conique qui a pour équation en coordonnées tangentielles,

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 - m = 0,$$

comme il est facile de le vérifier. Donc :

Théorème. — *Si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* $OA_1, OA_2, \ldots, OA_m$ *sur les tangentes à une courbe* C *parallèles à une direction* Δ *et que l'on prenne le point* A *déterminé par la relation*

$$m\,OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + \ldots + OA_m^2,$$

le lieu de ce point quand Δ *varie est une courbe qui coïncide avec la podaire du point* O *par rapport à une conique ayant pour centre le point* O; *autrement dit, si par le point* A *on élève une perpendiculaire à la droite* OA, *l'enveloppe de cette droite est une conique ayant pour centre l'origine.*

L'équation (14) nous fournit encore la relation

$$\sum \frac{1}{p_1} = \frac{-\varphi_{m-1}}{\varphi_m},$$

et, en posant

$$\frac{m}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = -\frac{\varphi_{m-1}}{\varphi_m},$$

le point (p, φ) décrit une courbe qui, en coordonnées polaires, a pour équation

$$\frac{m}{p} = -\frac{a_{m-1}\cos^{m-1}\varphi + b_{m-1}\cos^{m-2}\varphi\sin\varphi + \ldots + k_{m-1}\sin^{m-1}\varphi}{a_m\cos^m\varphi + b_m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi + \ldots + l_m\sin^m\varphi},$$

et en coordonnées rectangulaires

$$(x^2+y^2)(a_{m-1}y^{m-1}+b_{m-1}y^{m-2}x+\ldots+k_{m-1}x^{m-1}) \\ +m(a_m y^m+b_m y^{m-1}x+\ldots+l_m x^m)=0;$$

d'où ce théorème :

Théorème. — *Si d'un point* O *l'on abaisse les perpendiculaires* OA_1, OA_2, ..., OA_m *sur les tangentes à une courbe* C *parallèles à une direction* Δ, *le centre des moyennes harmoniques* A *des points* A_1, A_2, ..., A_m *décrit, quand* Δ *varie, une courbe d'ordre* $m+1$ *passant par les points cycliques, ayant à l'origine un point multiple d'ordre* m *et admettant, comme tangentes en ce point, les tangentes à la courbe* C *issues de l'origine.*

Si la courbe C est un cercle, le lieu du point A est une cubique circulaire unicursale droite, et, réciproquement, il est aisé de voir que toute cubique circulaire unicursale droite peut être obtenue par ce mode de génération.

Il existe une classe de courbes algébriques qui jouissent de propriétés intéressantes et que nous voulons signaler; ce sont celles dont les tangentes parallèles à une direction Δ se divisent en couples tels que le produit des distances à l'origine d'un couple de tangentes soit constant et égal à R^2. Mais auparavant nous allons indiquer quelques propriétés de la transformation suivante, dont le lien avec notre sujet est manifeste :

Étant donnée une courbe C *de classe* m, *on mène la tangente à cette courbe en un point* M *et sur la perpendiculaire* OP *abaissée d'un point fixe* O *sur cette tangente on prend une longueur* OP_1 *telle que*

$$OP \times OP_1 = R^2;$$

étudier la courbe enveloppée par la parallèle à la tangente menée par le point P_1.

On voit que, les courbes C et C_1 étant polaires réciproques par rapport au cercle de rayon R et de centre O, la transformation peut être définie de la façon suivante :

Étant données deux courbes polaires réciproques C *et* C_1, *étudier la courbe enveloppée par les droites menées par les différents points de* C_1, *parallèlement aux tangentes à la courbe* C *aux points correspondants.*

Les coordonnées tangentielles polaires des droites PM et P_1M_1 sont liées par la relation

$$p_1 = \frac{R^2}{p}, \qquad \varphi_1 = \varphi,$$

et les coordonnées tangentielles ordinaires par les relations

$$u_1 = \frac{u}{R^2(u^2+v^2)}, \qquad v_1 = \frac{v}{R^2(u^2+v^2)},$$

qu'il est impossible de ne pas rapprocher des formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Les formules

$$(9) \qquad \begin{cases} x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \\ y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi, \end{cases}$$

donnent pour les coordonnées du point M_1 où la droite P_1M_1 touche son enveloppe

$$x_1 = \frac{R^2}{p^2}(p\cos\varphi - p'\sin\varphi),$$

$$y_1 = \frac{R^2}{p^2}(p\sin\varphi - p'\cos\varphi),$$

et, par suite, en appelant r et r_1 les rayons vecteurs des

points M et M_1, on a

$$r_1^2 = \frac{R^4}{p^4} r^2,$$

d'où

$$\frac{r_1}{r} = \pm \frac{R^2}{p^2} = \pm \frac{p_1}{p};$$

on voit aisément en faisant la figure qu'il faut prendre le signe —, et, par suite, l'on a

$$\frac{r_1}{r} + \frac{p_1}{p} = 0,$$

d'où la construction très simple suivante :

Pour avoir le point où la droite P_1M_1 *touche son enveloppe, mener la droite* OM *qui coupe* P_1M_1 *en* M'_1, *et prendre le symétrique du point* M'_1 *par rapport au point* P_1.

Le rayon de courbure au point M_1 est donné par la formule

$$\rho_1 = -(p_1 + p''_1),$$

c'est-à-dire

$$\rho_1 = -\frac{R^2}{p^3}(p^2 + 2p'^2 - pp''),$$

expression qui, après une transformation facile, s'écrit

$$\rho_1 = -\frac{R^2}{p^3}(2r^2 + p\rho),$$

c'est-à-dire

(19) $$\rho_1 + \frac{R^2}{p^2}\rho + \frac{2R^2r^2}{p^3} = 0.$$

Mais on a

$$R^2 = pp_1,$$
$$p = r \sin V,$$
$$p_1 = r_1 \sin V,$$

V désignant l'angle OMP, r_1 le rayon vecteur OM'_1. La

relation (19) s'écrit

$$\frac{\rho_1}{r_1} + \frac{\rho}{r} + \frac{2}{\sin V} = 0. \tag{20}$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Revenons aux courbes que nous avons signalées plus haut, et remarquant que ce sont des antipodaires de courbes anallagmatiques, nous conviendrons de les désigner sous le nom d'*anallagmatiques tangentielles*. Il faut rappeler que le type général des équations de degré m, réciproques suivant le module R^2, c'est-à-dire telles que les racines se divisent en couples dont le produit soit égal à R^2, est

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots \\ & \qquad + R^{m-4} a_2 x^2 + R^{m-2} a_1 x + R^m a_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

de telle sorte que l'on a, en général,

$$a_p = R^{m-2p} a_{m-2p},$$

c'est-à-dire que les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux à une puissance de R^2 près.

Il faut de plus que m soit pair, puisque les racines vont par couples. Posons donc $m = 2\mu$. L'équation

$$\begin{aligned} a_0 p^{2\mu} + p^{2\mu-1} \varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + p^{2\mu-2} \varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) + \ldots \\ + R^{2(\mu-2)} p^2 \varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ + R^{2(\mu-1)} p\, \varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) + R^{2\mu} a_0 = 0 \end{aligned}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$\begin{aligned} a_0 R^{2\mu}(u^2 + v^2)^\mu + R^{2(\mu-1)}(u^2 + v^2)^{\mu-1} \varphi_1(u, v) \\ + R^{2(\mu-2)}(u^2 + v^2)^{\mu-2} \varphi_2(u, v) + \ldots \\ + \varphi_2(u, v) + \varphi_1(u, v) + a_0 = 0 \end{aligned}$$

représente une famille d'anallagmatiques tangentielles de classe m. Mais ce ne sont pas les seules anallagmatiques tangentielles de classe m. En effet, l'équation

$$\begin{aligned} p^2 \varphi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) + p\, \varphi_{m-1}(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ + R^2 \varphi_{m-2}(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(22)\quad R^2(u^2+v^2)\varphi_{m-2}(u,v)+\varphi_{m-1}(u,v)+\varphi_{m-2}(u,v)$$

représente encore une famille de courbes de classe m répondant à la question.

Si l'on suppose que u et v, au lieu de représenter les coordonnées d'une droite, représentent les coordonnées d'un point (x, y), l'équation (22) devient

$$R^2(x^2+y^2)\varphi_{m-2}(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)=0.$$

Ces courbes, transformées par dualité des courbes (22), ont été rencontrées par M. Picquet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVII, p. 460). C'est M. Picquet qui a montré le premier que : « outre les courbes du quatrième degré qui passent deux fois par les points cycliques, courbes désignées par les géomètres anglais sous le nom de *quartiques bicirculaires,* qui sont les seules courbes anallagmatiques de ce degré qui ont été considérées par les savants qui ont traité de ce sujet, il convient encore de ranger dans cette catégorie les courbes du quatrième degré qui ont un point double et dont les quatre points à l'infini sont les points cycliques une fois et les deux autres respectivement sur les tangentes au point double. »

De même, les anallagmatiques de quatrième classe se divisent en deux familles qui ont respectivement pour équations

$$(23)\quad \begin{cases} a_0p^4+p^3\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)+p^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi) \\ \qquad +R^2p\varphi_1(\cos\varphi,\sin\varphi)+a_0R^4=0 \end{cases}$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} p^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)+p\varphi_3(\cos\varphi,\sin\varphi) \\ \qquad +R^2\varphi_2(\cos\varphi,\sin\varphi)=0 \end{cases}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(25)\quad \begin{cases} a_0 R^4(u^2+v^2)^2 + R^2(u^2+v^2)\varphi_1(u,v) \\ \qquad + \varphi_2(u,v) + \varphi_1(u,v) + a_0 = 0, \end{cases}$$

$$(26)\quad R^2(u^2+v^2)\varphi_2(u,v) + \varphi_3(u,v) + \varphi_2(u,v) = 0.$$

Les premières correspondent aux quartiques bicirculaires. Les autres sont caractérisées par les propriétés suivantes :

Elles sont bitangentes à la droite de l'infini et ont un foyer tel que les tangentes issues de ce point vont passer par les points de contact de la courbe et de la droite de l'infini.

Comme cas particulier de l'équation (24) considérons l'équation

$$(24')\quad \begin{cases} p^2\varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) + p\varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) \\ \qquad + R^2\varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0. \end{cases}$$

Soient p_1 et p_2 les racines de l'équation (24') et posons $2p = p_1 + p_2$. On a

$$(27)\qquad 2p = -\frac{\varphi_1(\cos\varphi, \sin\varphi)}{\varphi_2(\cos\varphi, \sin\varphi)}$$

ou, en coordonnées tangentielles ordinaires,

$$(28)\qquad (u^2+v^2)\varphi_1(u,v) + 2\varphi_2(u,v) = 0.$$

Mais si nous supposons que, dans les équations (24') et (27), p et φ désignent des coordonnées polaires ordinaires, ces équations représentent des courbes qui ont pour équations en coordonnées rectangulaires

$$(29)\quad (x^2+y^2)\varphi_2(x,y) + (x^2+y^2)\varphi_1(x,y) + R^2\varphi(x,y) = 0$$

et

$$(30)\qquad 2\varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) = 0.$$

L'équation (28) est l'équation tangentielle de la dé-

férente de l'anallagmatique de seconde espèce (29) ou de l'antipodaire de la conique (30).

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Si l'on considère l'anallagmatique (24′) *du quatrième ordre et de seconde espèce, le lieu du milieu de la corde qui joint deux points correspondants est une conique qui passe à l'origine et dont les points à l'infini sont sur les tangentes à l'origine à l'anallagmatique. La déférente est une courbe du quatrième ordre et de troisième classe, c'est-à-dire une quartique à trois rebroussements. C'est l'antipodaire de la conique précédente. Elle a pour foyer l'origine et elle est bitangente à la droite de l'infini aux points situés sur les tangentes à l'origine à l'anallagmatique.*

QUELQUES COURBES CÉLÈBRES.

Courbe $p = a\varphi$. — Considérons la courbe dont l'équation est

$$p = a\varphi. \tag{31}$$

Pour reconnaître la nature de cette courbe, le moyen le plus simple consiste à recourir aux formules (11) qui donnent

$$\alpha = -a \sin\varphi,$$
$$\beta = a \cos\varphi;$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

La courbe est une développante de cercle et comme l'équation (31) en coordonnées polaires ordinaires représente une spirale d'Archimède, on a ce théorème :

La podaire de la développante d'un cercle C *par rapport au centre du cercle* C *est une spirale d'Archimède ayant pour pôle le centre du cercle* C.

Courbe $p = \frac{a}{\varphi}$. — Cette courbe est l'antipodaire d'une spirale hyperbolique; on voit encore que les tangentes de cette courbe sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des tangentes d'une développante de cercle, la transformation étant celle que nous avons définie plus haut.

On sait que la propriété caractéristique de la spirale hyperbolique

$$\rho = \frac{a}{\omega}$$

est d'avoir une sous-normale constante, propriété exprimée par la formule

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{a}.$$

De même de l'équation $p = \frac{a}{\varphi}$ on déduit

$$\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{a},$$

d'où

$$\frac{p}{p'} = -\varphi.$$

On a ensuite

$$x = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi \cos\varphi + \sin\varphi),$$

$$y = \frac{a}{\varphi^2}(\varphi \sin\varphi - \cos\varphi);$$

$$\alpha = \frac{a}{\varphi^3}(\varphi \sin\varphi - 2\cos\varphi),$$

$$\beta = -\frac{a}{\varphi^3}(\varphi \cos\varphi + 2\sin\varphi),$$

et, par suite,

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\varphi^4}(1 + \varphi^2), \qquad r = \frac{p}{a}\sqrt{p^2 + a^2},$$

$$r_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{\varphi^6}(4 + \varphi^2), \qquad r_1 = \frac{p^2}{a^2}\sqrt{4p^2 + a^2},$$

formules qui permettent de déterminer le point M où la tangente touche son enveloppe, et le centre de courbure au point M.

Courbe $p = ae^{\varphi}$. — De l'équation

$$p = ae^{\varphi}, \tag{32}$$

qui représente une spirale logarithmique, on déduit immédiatement

$$p' = ae^{\varphi}, \qquad p'' = ae^{\varphi}, \qquad \ldots;$$

d'où

$$\rho = -2p.$$

On a ensuite

$$\left\{\begin{aligned} x &= ae^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi), \\ y &= ae^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi), \\ \alpha &= -ae^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi), \\ \beta &= ae^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi). \end{aligned}\right. \tag{33}$$

On en déduit, en désignant par r le rayon vecteur d'un point de la courbe,

$$r^2 = 2ae^{2\varphi};$$

d'où

$$r = p\sqrt{2}.$$

Les formules (33) donnent ensuite

$$\beta = x, \qquad \alpha = -y.$$

L'équation

$$p = \frac{a}{e^{\varphi}} = ae^{-\varphi}$$

représente évidemment aussi une spirale logarithmique et les coordonnées (x, y) d'un point de cette nouvelle courbe s'expriment par les formules

$$x = ae^{-\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$
$$y = ae^{-\varphi}(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Des formules précédentes résultent la plupart des propriétés de la spirale logarithmique.

Tout d'abord on voit que les formules

$$\frac{x}{a} = e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$\frac{y}{a} = e^{\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

représentent une spirale logarithmique (*Journal de Mathématiques spéciales*, p. 172).

Dans la spirale logarithmique, les rayons vecteurs qui partent du pôle coupent la courbe sous un angle constant.

Le rayon de courbure de la courbe en un point est égal à deux fois la distance du pôle à la tangente en ce point.

La projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant.

Le lieu des extrémités de la sous-normale polaire coïncide avec la développée de la spirale logarithmique.

La développée, la podaire, l'antipodaire, la polaire réciproque, la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une spirale logarithmique sont des spirales logarithmiques.

Courbes $\rho^m = a^m \sin m\varphi$. — De cette équation on déduit

$$\rho^{m-1}\rho' = a^m \cos m\varphi,$$

et, par suite, en appelant V l'angle sous lequel le rayon vecteur coupe la courbe au point M, on a

$$\tang V = \frac{\rho}{\rho'} = \tang m\varphi;$$

d'où

$$V = m\varphi,$$

c'est-à-dire que l'angle V varie proportionnellement

à φ. « La courbe s'infléchit d'un mouvement uniforme sur le rayon vecteur quand celui-ci tourne lui-même d'un mouvement uniforme. » (*Nouvelles Annales*, 1883, p. 118.)

Ce résultat était d'ailleurs évident, puisque la podaire d'une spirale à inflexion proportionnelle est une spirale de même nature.

Le rayon de courbure donné par la formule

$$\rho = -(p + p'')$$

est égal à

$$\rho = (m-1)a \sin^{\frac{1}{m}-2} m\varphi,$$

formule qui peut s'écrire

$$\rho = \frac{(m-1)p}{\sin^2 m\varphi}.$$

Mais si l'on appelle N la portion de normale comprise entre la courbe et la perpendiculaire au rayon vecteur au pôle, on voit facilement que l'on a (*Nouvelles Annales*, 1883, p. 126)

$$\rho = (m-1)\text{N}.$$

Cette propriété peut servir à déterminer le centre de courbure de la courbe en un point.

APPLICATIONS DIVERSES.

Théorème fondamental de la théorie des développées. — En désignant par ds et $d\sigma$ les différentielles des arcs d'une courbe et de sa développée, on a les formules

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi},$$

$$ds = -(p + p'')\,d\varphi,$$

$$d\sigma = -(p' + p''')\,d\varphi;$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi},$$

$$d\sigma - d\rho = 0,$$

$$\sigma - \rho = \text{const.}$$

Coordonnées intrinsèques. — La position d'un point M sur une courbe C est fixée, si l'on connaît la longueur de l'arc qui sépare le point M d'une origine fixe O, choisie sur la courbe, c'est-à-dire la distance du point M au point O évaluée sur la courbe. Le rayon de courbure ρ de la courbe au point M est une fonction de l'arc OM $= s$,

$$\rho = \varphi(s).$$

Cette équation est l'équation intrinsèque de la courbe; intrinsèque, parce qu'elle permet d'étudier les propriétés de la courbe sans l'intervention d'aucun élément extérieur.

Quand on connaît l'équation tangentielle polaire d'une courbe, il est facile, au moins théoriquement, d'obtenir son équation intrinsèque. En effet, soit

$$p = f(\varphi)$$

l'équation de la courbe. On a les relations

$$ds = \rho\, d\varphi,$$

$$\rho = -(p + p'') = -f(\varphi) - f''(\varphi);$$

d'où l'on déduit

$$ds = -(p + p'')\, d\varphi = -f(\varphi)\, d\varphi - f''(\varphi)\, d\varphi,$$

$$s = -\int f(\varphi)\, d\varphi - f'(\varphi);$$

en éliminant φ entre cette équation et l'équation qui donne ρ, on obtient une relation entre ı et ρ, c'est-à-dire l'équation intrinsèque de la courbe.

Prenons comme exemple la courbe enveloppée par

une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires; c'est-à-dire une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Son équation, facile à obtenir, est

$$p = R \sin^2 \varphi;$$

on en déduit

$$\rho = -(p + p'') = 3 R \sin 2\varphi = 3p;$$

d'où ce théorème :

Le rayon de courbure de l'hypocycloïde à quatre rebroussements en un point est égal à trois fois la distance du centre de la courbe à la tangente en ce point. (Voir *Nouvelles Annales,* 1886, p. 278. Le théorème est attribué à M. Lamarle.)

On a ensuite

$$s = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} R \sin 2\varphi \, d\varphi - 2 R \cos 2\varphi,$$

$$= -\tfrac{3}{2} R \cos 2\varphi,$$

$$\rho = 3 R \sin 2\varphi;$$

par suite,

$$4s^2 + \rho^2 = 9 R^2 :$$

c'est l'équation intrinsèque de la courbe; les arcs sont comptés à partir du point qui se trouve sur la bissectrice de l'angle yOx. L'arc compris entre deux points de rebroussements est égal à $3R$, d'où ce théorème :

La longueur de l'hypocycloïde à quatre rebroussements est douze fois le rayon du cercle inscrit.

L'équation

$$p = R \sin 2\varphi$$

représente en coordonnées polaires ordinaires la po-

daire de l'hypocycloïde par rapport à son centre; c'est une rosace à quatre branches.

Comme second exemple, prenons l'hypocycloïde a trois rebroussements. Son équation tangentielle est

$$4Rv^2u-(u^2+v^2)=0.$$

On y arrive facilement en la considérant comme l'enveloppe d'une droite dont le milieu de la portion comprise entre les axes décrit le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2-2Rx=0.$$

En coordonnées tangentielles polaires, l'équation précédente devient

$$p=4R\sin^2\varphi\cos\varphi=2R\sin2\varphi\cos\varphi,$$

ou par une transformation facile

$$p=R(\cos\varphi-\cos3\varphi).$$

On a par suite

$$p'=R(-\sin\varphi+3\sin3\varphi),$$
$$p''=R(-\cos\varphi+9\cos3\varphi);$$

d'où

$$\rho=-8R\cos3\varphi,$$

$$s=-8R\int_0^\varphi\cos3\varphi=-\frac{8}{3}R\sin3\varphi$$

et, par suite,

$$\rho^2+9s^2=64R^2:$$

c'est l'équation intrinsèque de l'hypocycloïde; l'origine est un sommet de la courbe. La longueur d'un arc compris entre deux points de rebroussement est $\frac{16}{3}R$, d'où ce théorème :

La longueur de l'hypocycloïde est seize fois le rayon du cercle inscrit.

Les formules

$$p = R(\cos\varphi - \cos 3\varphi),$$
$$\rho = -8R\cos 3\varphi$$

donnent

$$p - R\cos\varphi = \frac{\rho}{8}.$$

De là résulte le théorème suivant, dû à M. de Longchamps (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884) :

Le rayon de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements en un point est égal à huit fois la distance du centre de la courbe à la tangente en ce point.

L'équation

$$p = R(\cos\varphi - \cos 3\varphi)$$

est l'équation de la podaire de l'hypocycloïde; c'est un folium double.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1895).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés deux cercles C et C_1 qui ont même centre A et un troisième cercle S dont le centre est O, on considère les cercles Σ orthogonaux à C et tels que l'axe radical de chacun d'eux et du cercle S touche le cercle C_1.

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles Σ est un cercle S_1.

(*Pour abréger le langage, nous dirons que le cercle* S_1 *correspond au cercle* S.)

2° On suppose que deux cercles C et C_1 sont confondus et l'on propose d'étudier, dans cette hypothèse, la position rela-

tive des cercles S et S_1 quand on fait varier le rayon du cercle S, le cercle C et le centre O du cercle S restant fixes.

3° Désignons par S_2 le cercle qui *correspond* à S_1, par S_3 le cercle qui *correspond* à S_2, et ainsi de suite.

En supposant encore les cercles C et C_1 *confondus*, on propose de chercher si le cercle S_n tend vers une position limite quand n augmente indéfiniment, mais seulement dans les hypothèses suivantes :

$$d < R, \qquad d = R, \qquad d = 3R,$$

d représentant la distance AO et R le rayon du cercle C.

Trouver, dans les hypothèses $d = R$ et $d = 3R$, l'expression du rayon du cercle S_n en fonction de R et de n.

Mathématiques spéciales.

On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M.

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S.

Trouver le lieu C des sommets M_1, M_2, M_3 de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D, et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution.

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ en fonction des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H.

Trouver le lieu de ce centre ω lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

4° Démontrer que la droite qui joint le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique

et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point G est le milieu de ωI.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Soient $R(z)$ un polynôme du huitième degré, $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ses racines supposées toutes distinctes et différentes de o.

Soient y une fonction de z définie par la relation

$$y^2 = R(z)$$

et $\pm y_0$ les valeurs de y pour $z = 0$.

On considère l'intégrale

$$V = \int_0^x \frac{z^{p-1}\,dz}{y} \qquad (p = 1, 2, 3)$$

obtenue en allant de l'origine au point (x) par un chemin *quelconque*, la valeur de y, pour $z = 0$, étant $+y_0$.

On désigne par I la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* O B x, et par A_j la valeur de V qui correspond à un chemin *déterminé* O C a_j allant de l'origine au point (a_j), $(j = 1, 2, \ldots, 8)$.

Cela posé, on propose de démontrer que *toutes* les valeurs que peut prendre V s'obtiennent en ajoutant aux quantités I et $2A_1 - I$ des multiples quelconques positifs ou négatifs de *six* constantes ω_j, définies par les relations

$$\omega_1 = 2(A_1 - A_2), \qquad \omega_2 = 2(A_2 - A_3),$$
$$\omega_3 = 2(A_1 - A_2 + A_3 - A_4), \qquad \omega_4 = 2(A_4 - A_5),$$
$$\omega_5 = 2(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6), \qquad \omega_6 = 2(A_6 - A_7).$$

Les constantes ω_j sont appelées les *périodes* de l'intégrale V, et l'on dit que ces périodes sont *distinctes* s'il n'existe entre elles aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

Application. — On suppose que la fonction $R(z)$ se réduise au trinôme

$$z^8 + az^4 + 1$$

et l'on considère les deux intégrales

$$\omega = \int_0^x \frac{dz}{y}, \qquad \upsilon = \int_0^x \frac{z^2\,dz}{y}.$$

1° Démontrer que, pour chacune de ces intégrales, les six périodes se réduisent à *quatre* distinctes, qui peuvent être mises sous la forme

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad i\Omega_1, \quad i\Omega_2$$

pour l'intégrale ω, et sous la forme

$$\Upsilon_1, \quad \Upsilon_2, \quad i\Upsilon_1, \quad i\Upsilon_2$$

pour l'intégrale υ.

2° Entre les périodes Ω_i et Υ_i on a les relations

$$\Upsilon_1 = \Omega_1, \qquad \Upsilon_2 = i\Omega_2.$$

3° Montrer que l'on peut trouver pour les constantes A et B une infinité de valeurs telles que, pour l'intégrale $A\omega + B\upsilon$, le nombre des périodes se réduise à *deux* distinctes.

Composition de Mécanique rationnelle.

1° Une plaque pesante ABC dont le périmètre contient un segment rectiligne AB s'appuie par ce côté AB sur un plan fixe qui est horizontal et sur lequel AB glisse sans frottement.

Cette plaque, qui est immobile à l'origine du temps, est abandonnée à l'action de la pesanteur.

On demande la condition nécessaire et suffisante pour que, pendant le mouvement, le côté rectiligne AB se déplace parallèlement à sa position initiale.

2° La condition demandée est, en particulier, satisfaite pour une plaque homogène dont le périmètre est une demi-circonférence de cercle.

On considère une plaque homogène, demi-circulaire, dont le rayon est égal à 1^m; on suppose, en outre, qu'à l'origine du temps la plaque est immobile et fait avec le plan horizontal un angle de 30°.

On demande de trouver, dans ces hypothèses particulières, une limite supérieure et une limite inférieure du temps qui s'écoule depuis l'origine jusqu'à l'instant où la plaque semi-circulaire vient coïncider avec le plan horizontal.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1895.

Mathématiques.

1° Les coordonnées des points d'une courbe (C) étant représentées par les formules

$$x = \frac{2}{t-a}, \qquad y = \frac{2}{t-b}, \qquad z = \frac{2}{t-c},$$

où t désigne un paramètre variable et a, b, c sont trois constantes *différentes*, on considère tous les segments de droite dont les deux extrémités sont sur la courbe (C) et l'on demande de trouver la surface (S) lieu des milieux M de ces courbes.

2° Démontrer que la surface (S) contient la courbe (C) et ses trois asymptotes.

3° Montrer qu'à chaque point M de cette surface correspond une seule corde de la courbe (C) ayant son milieu en M. Discuter analytiquement et mettre ainsi en évidence trois droites tracées sur la surface (S).

4° Délimiter la région du plan des xy où doit se projeter un point M de la surface (S) pour que la corde dont ce point est le milieu joigne deux points réels de la courbe (C).

5° Trouver toutes les droites situées à distance finie sur la surface (S).

6° Trouver le lieu des cordes de la courbe (C) dont les milieux sont sur une droite.

Physique.

I. Une sphère de verre, de rayon a, est percée d'une cavité sphérique, concentrique, de rayon b, remplie de mercure. Un point lumineux est placé extérieurement à une distance D du centre.

On demande :

1° D'étudier la marche des rayons centraux ;

2° De distinguer les différentes régions que les rayons mar-

ginaux éclairent, soit par transmission, soit par réflexion sur le mercure.

On examinera l'influence de la dispersion.

II. Une goutte d'eau à zéro, pesant un demi-gramme, est placée dans une cavité au fond d'un cylindre de 20^{cm} de diamètre, dont les parois sont rigoureusement imperméables à la chaleur. Un piston, poussé à fond, ne laisse qu'un espace nuisible négligeable; on soulève ce piston de 38^{cm}; il ne reste plus qu'un globule de glace à zéro.

On demande :

1° Quel est le poids de la glace :

2° Quelle est la chaleur de fusion de la glace.

Tension maxima de la vapeur d'eau à zéro ... $4^{mm},6$
Chaleur de volatilisation de l'eau à zéro 660

Pour répéter l'expérience classique de Leslie, on met ordinairement la goutte d'eau dans un bouchon placé à peu de distance au-dessus d'un large cristallisoir contenant de l'acide sulfurique concentré. Quel rôle joue cet acide sulfurique?

Dissertation française.

Expliquer et discuter cette phrase de d'Alembert :

« Les vérités mathématiques sont en quelque sorte l'asymptote des vérités physiques, c'est-à-dire le terme dont celles-ci peuvent indéfiniment approcher, sans jamais y arriver exactement. »

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE DE LA MESURE DES VOLUMES;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Une formule très générale et très simple

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B''). \qquad (1)$$

donne, comme on sait, le volume d'un solide S limité par deux faces parallèles à un plan P, lorsque l'expression $\varphi(z)$ de l'aire de la section faite dans S par un plan mené parallèlement à P, à la distance quelconque z, est un polynôme du deuxième ou du troisième degré en z : cette formule est-elle applicable avec d'autres formes de $\varphi(z)$ quand l'une, au moins, des bases de S peut être prise à une distance arbitraire de P? Je n'ai pas vu que la question ait été posée, mais il est facile d'y répondre négativement dans le cas très général où $\varphi(z)$ pourrait s'exprimer à l'aide d'une série ordonnée suivant les puissances positives de z.

Comptons z à partir de la face de S qui est donnée et soit $2h$ la hauteur du solide; supposons que $\varphi(z)$ soit donné par une série de la forme

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_1^\infty A^n z^{\alpha_n},$$

α_1, α_2, ... étant des exposants positifs quelconques, mais croissants, et la série convergente tant que z est inférieur à une certaine limite qui n'atteint pas non plus $2h$. On devrait avoir

$$\int_0^{2h} \varphi(z)\,dz = \frac{h}{3}\,[\varphi(0) + \varphi(2h) + 4\varphi(h)],$$

ou, en développant $\varphi(z)$ et effectuant les calculs,

$$2A_0 h + \sum \frac{2^{\alpha_n+1}}{a_n+1} A_n h^{\alpha_n+1} = \frac{h}{3}\left[6A_0 + \sum A_n(2^{\alpha_n} + 4)h^{\alpha_n}\right].$$

Les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres doivent être égaux : cela a lieu pour les termes en h; mais, pour qu'il en soit de même des termes en h^{α_n+1}, par exemple, il faut, si A_n n'est pas

nul, que l'exposant α_n satisfasse à une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$F(x) = (5 - x)\,2^{x-2} - x - 1 = 0;$$

cette équation a pour racines réelles 1, 2 et 3, et elle ne saurait en avoir plus de trois, car $F''(x)$, égale à

$$\log 2[(5 - x)\log 2 - 2]\,e^{x-2},$$

ne s'annule que pour une valeur réelle et finie de x : donc $\varphi(z)$ se réduit nécessairement à la forme

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3.$$

On ne peut d'ailleurs considérer des solides dont les sections auraient des aires infinies.

J'indiquerai une démonstration très élémentaire de la formule (1) dans le cas, qui est le plus important, où $\varphi(z)$ n'est que du second degré. Imaginons un prisme T, dont les bases soient situées dans les plans des bases B, B' de S et deux pyramides T', T'' ayant, l'une sa base, l'autre son sommet dans le plan de B et inversement dans le plan de B' : il est facile de déterminer les bases de T, T', T'' de manière que la somme (algébrique) des aires des sections faites dans les trois solides par tout plan parallèle à P soit égale à l'aire de la section faite dans S. Le volume de S sera égal à la somme des volumes de T, T', T'' et, comme la formule (1) est évidente pour le prisme et les pyramides, elle sera également vraie pour S.

SUR LES CUBIQUES A POINT DE REBROUSSEMENT;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. Dans les *Leçons de Géométrie* de CLEBSCH (trad. BENOIST, t. II, p. 345) on trouve la propriété suivante des courbes du troisième degré qui possèdent un point de rebroussement.

Si d'un point M_0 de la courbe on mène la tangente, si du point de contact M_1 de cette tangente on mène encore la tangente, et ainsi de suite, on obtient une série de points $M_0, M_1, \ldots, M_n$ tels que, lorsque n augmente indéfiniment, le point M_n tend vers une position limite, qui est celle du point d'inflexion.

Inversement, si l'on mène la tangente en M_0 elle coupe en un point M_{-1}; la tangente en M_{-1} coupe en M_{-2} et ainsi de suite. Le point M_{-n} tend vers le point de rebroussement.

2. Cette propriété peut se généraliser par la méthode même de Clebsch. Si l'on prend un triangle de référence formé par la droite qui joint les points d'inflexion et de rebroussement, et par les tangentes en ces points, la cubique peut se représenter par l'équation

$$x^2 z = y^3.$$

Si l'on pose $y = \lambda x$, à chaque valeur de λ correspond un point de la cubique. Les points d'intersection de la cubique avec une conique dont l'équation serait

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy = 0$$

sont déterminés par l'équation

$$A''\lambda^6 + 2B\lambda^4 + 2B'\lambda^3 + A'\lambda^2 + 2B''\lambda + A = 0.$$

On voit que dans une telle équation la somme des racines est toujours nulle. C'est ce qui permet d'établir facilement les résultats suivants.

3. Considérons une série de coniques dont chacune a avec la cubique un contact du quatrième ordre et telles que le point de contact de l'une soit le point d'intersection de la suivante. En partant d'un point de paramètre λ_0, on peut, comme dans le problème de Clebsch, déterminer deux suites de points,

$$\begin{array}{llll} \lambda_0, & \lambda_1, & \ldots, & \lambda_n, & \ldots, \\ \lambda_0, & \lambda_{-1}, & \ldots, & \lambda_{-n}, & \ldots; \end{array}$$

on voit que

$$\lambda_n = (-\tfrac{1}{5})^n \lambda_0,$$

de sorte que le point λ_n a pour limite le point $\lambda = 0$, c'est-à-dire le point d'inflexion. De même

$$\lambda_{-n} = (-5)^n \lambda_0,$$

de sorte que le point λ_{-n} a pour limite le point $\lambda = \infty$, c'est-à-dire le point de rebroussement.

4. Si l'on considérait une suite analogue formée de coniques ayant chacune avec la cubique deux contacts, l'un du premier ordre et l'autre du troisième, on retomberait sur le problème de Clebsch; car, dans ce cas, les coniques se réduiraient à des droites doubles. Je me borne à signaler ce fait, qui est facile à vérifier.

5. Si l'on considère des coniques ayant deux contacts du deuxième ordre, les paramètres des points de contact sont liés par l'équation

$$\lambda' + \lambda'' = 0.$$

Ces points ne forment donc plus une suite. Ils sont deux à deux sur des droites passant par le point d'inflexion; la corde qui les joint est divisée harmoniquement par le point d'inflexion et par le point où elle coupe la tangente au rebroussement.

6. On peut assujettir les coniques à passer par des points fixes de la cubique. La somme des paramètres des points variables n'est plus nulle en général, elle est toujours constante. On obtient alors des résultats du même genre que ceux qui précèdent; j'indiquerai seulement le suivant.

Si l'on considère une cubique circulaire à point de rebroussement, et une série de cercles osculateurs tels que le point de contact de chacun d'eux soit le point d'intersection du suivant avec la cubique, on a, comme précédemment, des suites de points

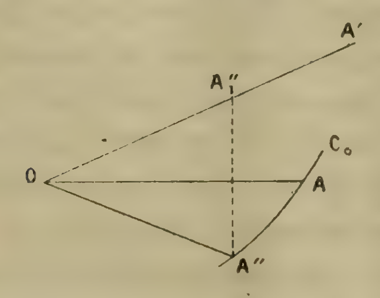
$$\begin{array}{llll} \lambda_0, & \lambda_1, & \ldots, & \lambda_n, & \ldots, \\ \lambda_0, & \lambda_{-1}, & \ldots, & \lambda_{-n}, & \ldots: \end{array}$$

le point λ_{-n} tend vers le rebroussement, et le point λ_n vers le point où le cercle osculateur a avec la cubique un contact du troisième ordre. Ce point est distinct du point d'inflexion si celui-ci est à distance finie.

DES FIGURES SEMBLABLEMENT VARIABLES AYANT UN CENTRE PERMANENT DE SIMILITUDE, ET DONT UNE COURBE PASSE PAR UN POINT FIXE;

Par M. J. RÉVEILLE.

I. Soit C une courbe liée à une figure semblablement variable dont le point O est un centre permanent de similitude. Je suppose que la courbe C passe par le point fixe A; soit C_0 une certaine position de la courbe C; je vais chercher la ligne décrite par le point A considéré comme appartenant à la figure variable.



Soit A' la position de ce point quand la figure a tourné de l'angle α, et soit A'' le point de la courbe C_0 qui vient en A après cette rotation.

On a les relations

$$\alpha = \widehat{A''OA} = \widehat{AOA'}; \qquad \frac{OA''}{OA} = \frac{OA}{OA'} \quad \text{ou} \quad \overline{OA}^2 = OA' \times OA''.$$

Le point A''_1 symétrique du point A'' par rapport à la droite OA se trouve sur OA'; il est aussi sur la courbe C_1 symétrique de C_0 par rapport à cette droite OA; et la relation $\overline{OA}^2 = OA''_1 \times OA'$ montre que le point A'

appartient à la courbe Γ_1 inverse de C_1. Tous les autres points de la figure décrivent des courbes Γ semblables à Γ_1.

Projetons maintenant le centre O au point ω sur une droite D de la figure semblablement variable; ce point ω décrit une courbe Γ, et l'enveloppe de D est alors la podaire négative de Γ, c'est-à-dire une courbe semblable à la polaire réciproque de C_1, le cercle directeur ayant son centre au point O.

Si la courbe C est anallagmatique, les courbes Γ et C sont semblables; si la courbe C est égale à sa polaire réciproque, la droite D enveloppe une courbe semblable à la courbe C.

II. Supposons maintenant que la courbe C, au lieu de passer par un point fixe, touche une droite fixe A.

Transformons la figure par la méthode des polaires réciproques en prenant un cercle directeur de centre O. Nous obtiendrons une figure semblablement variable, dont une courbe K passe par un point fixe.

D'après ce qui précède, une droite de cette dernière figure enveloppe une courbe semblable à la polaire réciproque de la courbe K, c'est-à-dire semblable à la courbe C.

Donc un point de la figure donnée décrit une courbe semblable à la courbe K, c'est-à-dire à la polaire réciproque de la courbe C. Quant à une droite de cette figure, on voit sans peine qu'elle enveloppe une courbe semblable à la podaire négative de la polaire réciproque de la courbe C.

III. Étant parti d'une figure semblablement variable, dont une courbe passe par un point fixe, nous sommes arrivé, par la méthode de transformation des polaires

réciproques, à une figure dont une courbe touche une droite fixe.

La méthode d'inversion conduit maintenant à une figure semblablement variable, dont une courbe touche une circonférence fixe passant par le centre permanent de similitude.

Une nouvelle transformation par les polaires réciproques amène à une figure, toujours semblablement variable, dont une courbe est tangente à une parabole ayant le centre permanent de similitude pour foyer; et ainsi de suite. On pourra alterner indéfiniment ces deux méthodes de transformation.

IV. Par suite de ces transformations successives la courbe C et le point fixe A, par lequel elle passe, se transforment indéfiniment. Mais il n'en est pas de même des courbes décrites par les points, ou enveloppées par les droites des figures semblablement variables successivement obtenues.

En effet, nous avons vu que, dans le premier cas, un point de la figure décrit la courbe *réciproque* de la courbe C, et une droite enveloppe la polaire réciproque de cette courbe C.

Par suite de la première transformation par polaires réciproques, un point de la nouvelle figure décrit la courbe primitive C, et une droite enveloppe la podaire négative de C ou la polaire de son inverse.

Une inversion donne maintenant une troisième figure, dont un point décrit l'inverse de la courbe C, et dont une droite enveloppe la polaire réciproque de cette courbe C.

Nous sommes ainsi ramené aux résultats du premier cas, et les résultats suivants se reproduisent périodiquement.

V. Les considérations qui précèdent permettent de résoudre immédiatement un assez grand nombre de problèmes, parmi lesquels j'énoncerai les suivants, la plupart très connus, et qu'on pourrait d'ailleurs multiplier indéfiniment.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères ayant un foyer commun et passant par un point fixe est un limaçon de Pascal; l'enveloppe de chaque asymptote est un cercle.

Le lieu des foyers des hyperboles équilatères concentriques et passant par un point fixe est une lemniscate; l'enveloppe des directrices est une hyperbole équilatère.

Le lieu du foyer d'une parabole dont le sommet est fixe et qui passe par un autre point fixe est une cissoïde; l'enveloppe de la directrice est une parabole.

Le lieu des sommets des ellipses concentriques et semblables qui passent par un point fixe est la courbe inverse de l'ellipse qui a ce point fixe pour sommet; les directrices enveloppent une ellipse.

Le lieu des centres des cercles tangents à une cardioïde et passant par le point de rebroussement est un cercle.

Étant donnés deux cercles égaux et tangents extérieurement, si une lemniscate a son point double au point de contact, et si elle est tangente aux deux cercles, le lieu de ses sommets est une lemniscate.

L'enveloppe de l'asymptote d'une cissoïde qui est tangente à un cercle fixe passant par son point de rebroussement est une parabole.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur au lycée Charlemagne.

J'ai donné dernièrement dans le *Bulletin scientifique* de M. Lebon une démonstration de ce théorème que je croyais nouvelle; M. Brisse m'a fait observer qu'elle avait été donnée jadis par Sturm et arrangée par Liouville. En voici une autre que je crois préférable, et qui ne laisserait rien à désirer si l'on pouvait établir d'une manière plus élémentaire le lemme sur lequel je m'appuie.

LEMME. — *On peut toujours trouver dans le plan au moins une valeur finie de z telle que le module d'un polynôme $f(z)$ prenne une valeur moindre qu'un nombre donné ε, si petit qu'il soit.*

En effet, si pour toute valeur de z le module de $f(z)$ était supérieur à ε, celui de $\frac{1}{f(z)}$ serait inférieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, nombre fixe donné; donc cette dernière fonction qui est holomorphe dans toute l'étendue du plan serait une constante, en vertu du théorème de Liouville. Il en serait donc de même de $f(z)$, c'est-à-dire que tous les coefficients seraient nuls, sauf le terme indépendant de z, ce qu'on ne suppose pas.

THÉORÈME. — *Si une équation algébrique de degré $m-1$ admet $m-1$ racines, toute équation algébrique de degré m admet m racines.*

Soit

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

une équation algébrique de degré m. L'équation dérivée $f'(z) = 0$ est de degré $m - 1$ et admet, par hypothèse, $m - 1$ racines $a, b, c, \ldots, l$. Si l'un des nombres $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $\ldots$, $f(l)$ est nul, le théorème est démontré. Sinon soit $\operatorname{mod} f(a) = A \neq 0$; on peut décrire de a comme centre un cercle de rayon ρ assez petit, mais fixe, tel que dans tout l'intérieur de ce cercle on ait

$$\operatorname{mod} f(z) > \frac{A}{2}.$$

Donc, si l'on suppose, ce qui est permis, que A est le plus petit des modules des nombres $f(a)$, $f(b)$, $\ldots$, $f(l)$, cette condition sera satisfaite dans tout l'intérieur de tous les cercles de rayon ρ, de centres $a, b, c, \ldots, l$ et, par conséquent, si pour un point z on a

$$\operatorname{mod} f(z) < \frac{A}{2},$$

le point z sera extérieur à tous ces cercles.

Or on a

$$f'(z) \equiv m A_0 (z - a)(z - b) \ldots (z - l);$$

donc, pour tout point extérieur aux cercles ρ,

$$\operatorname{mod} f'(z) > m A_0 \rho^{m-1} \quad \text{ou} \quad P.$$

On peut ensuite décrire, de l'origine comme centre, une circonférence de rayon ρ' assez grand, mais fixe, tel que pour tout point extérieur à cette circonférence on ait

$$\operatorname{mod} f(z) > M,$$

M étant un nombre donné.

Donc tout point z tel que $f(z) < M$ est à l'intérieur de ce cercle ρ' et les modules de

$$\frac{1}{2}f''(z),\quad \frac{1}{3!}f'''(z),\quad \frac{1}{4!}f^{\text{IV}}(z),\quad \ldots,\quad \frac{1}{m!}f^{m}(z)$$

sont tous moindres qu'un nombre assignable M' fixe.

Cela posé, je puis choisir z_0 tel que le module de $f(z_0)$ ou R_0 soit moindre que le plus petit des nombres

$$\frac{A}{2},\quad M,\quad P,\quad \frac{P^2}{(m-1)M'}\quad \text{ou}\quad \frac{1}{\alpha};$$

il sera intérieur au cercle ρ' et extérieur aux cercles ρ; en particulier $R_0\alpha < 1$.

Je fais $z = z_0 + h$, d'où

$$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!}f''(z_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(z_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!}f^m(z_0),$$

puis $h = -\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$, j'ai

$$f(z_0+h) = h^2\left[\frac{1}{2}f''(z_0) + \frac{h}{3!}f'''(z_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!}f^m(z_0)\right];$$

donc

$$\operatorname{mod} f(z_0+h)$$

ou

$$R_1 < h^2(m-1)M' < R_0^2\frac{(m-1)M'}{P^2} = R_0^2\alpha < R_0,$$

donc le point $z_1 = z_0 + h$ jouit des mêmes propriétés que z_0.

Je fais ensuite $z = z_1 + k$ puis $k = -\dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}$ et j'ai, en posant $R_2 = \operatorname{mod} f(z_1 + k)$,

$$R_2 < k^2(m-1)M' < R_1^2\alpha < R_0^4\alpha^3 < R_0(R_0\alpha)^3 < R_0.$$

donc le point $z_2 = z_1 + k$ jouit des mêmes propriétés que z_1 et z_0 et ainsi de suite. Je forme ainsi une suite de nombres ou points

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots,$$

bien déterminés, tous intérieurs au cercle ρ' et extérieurs aux cercles ρ.

Si pour n fini, on a

$$f(z_n) = 0,$$

le théorème est démontré.

Sinon la suite se prolonge indéfiniment et l'on a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} f(z_0) = R_0,\\
&\operatorname{mod} f(z_1) = R_1 < R_0(R_0\alpha),\\
&\operatorname{mod} f(z_2) = R_2 < R_0(R_0\alpha)^2,\\
&\operatorname{mod} f(z_3) = R_3 < R_0(R_0\alpha)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\operatorname{mod} f(z_n) = R_n < R_0(R_0\alpha)^n.
\end{aligned}$$

Donc R_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Or

$$z_n = z_0 - \frac{R_0}{f'(z_0)} - \frac{R_1}{f'(z_1)} - \frac{R_2}{f'(z_2)} - \ldots - \frac{R_{n-1}}{f'(z_{n-1})},$$

qui forme une série lorsque l'on imagine que n croît indéfiniment.

On a, quel que soit p,

$$\operatorname{mod}\left|\frac{R_p}{f'(z_p)}\right| < \frac{R_0}{P}(R_0\alpha)^p;$$

donc la série est absolument convergente et z_n *tend vers une limite finie et bien déterminée* λ, mais $f(z_n)$ tend vers $f(\lambda)$: donc $f(\lambda) = 0$.

L'équation admet donc la racine λ et, par suite, admet m racines.

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE QUI DONNE, SOUS FORME EXPLICITE, LA RÉSULTANTE DE PLUSIEURS ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynômes entiers en x de degré m, choisis de telle sorte que les $\mu = m^n$ solutions

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{\mu\mu} \end{array}$$

des équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_n = 0$$

soient finies et distinctes.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, $n+1$ polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de degré m également. On pourra poser d'une infinité de manières

$$(2) \quad \varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) + (x_1 - x_{1j})\varphi^j_{i1} + \ldots + (x_n - x_{nj})\varphi^j_{in},$$

les φ^k_{ij} désignant des polynômes de degré $m-1$ par rapport aux x_i et aux x_{ij}; nous poserons encore

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{1i}, x_{2i}, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi^i_{11} & \cdots & \varphi^i_{1n} \\ \varphi_2 & \varphi^i_{21} & \cdots & \varphi^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n+1} & \varphi^i_{n+1,1} & \cdots & \varphi^i_{n+1,n} \end{vmatrix} = \theta_{0i},$$

$$\theta(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{1j}, x_{2j}, \ldots) = \theta_{ij}$$

et il est clair que l'on peut supposer $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, mais cela n'est pas nécessaire pour ce qui va suivre. Considérons le déterminant

$$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}\theta_{22} \ldots \theta_{\mu\mu}.$$

et commençons par évaluer son degré par rapport à toutes les variables x_{ij} : le degré de θ_{ij} est évidemment

$$m + n(m - 1)$$

et celui de Θ est en apparence

$$\mu[m + n(m - 1)],$$

mais il est en réalité moindre; pour nous en assurer, remplaçons x_{ij} par $a_{ij} t_j$, les fonctions θ_{ij} prendront la forme $\varpi(t_i, t_j)$ et Θ deviendra

$$\Theta_1 = \Sigma \pm \varpi(t_1, t_1) \ldots \varpi(t_\mu, t_\mu).$$

Le degré de Θ_1 en t_1, t_2, ... est le degré de Θ par rapport aux x_{ij} et nous allons l'évaluer : à cet effet, posons

$$G(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_\mu),$$

$$\xi_i = \frac{G(t)}{(t - t_i) G'(t_i)}.$$

La formule d'interpolation de Lagrange donnera

$$\begin{aligned} \varpi(t, t_1) &= \varpi_{11} \xi_1 + \varpi_{21} \xi_2 + \ldots + \varpi_{\mu 1} \xi_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varpi(t, t_\mu) &= \varpi_{1\mu} \xi_1 + \varpi_{2\mu} \xi_2 + \ldots + \varpi_{\mu\mu} \xi_\mu; \end{aligned}$$

si dans ces formules on fait $t = a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, $a_1, \ldots$ désignant des arbitraires, on voit que

$$\begin{vmatrix} \varpi(a_1, t_1) & \varpi(a_2, t_1) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_1) \\ \varpi(a_1, t_2) & \varpi(a_2, t_2) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varpi(a_1, t_\mu) & \varpi(a_2, t_\mu) & \ldots & \varpi(a_\mu, t_\mu) \end{vmatrix}$$

$$= \Theta_1 \Sigma \pm \frac{G(a_1) G(a_2) \ldots}{(t_1 - a_1)(t_2 - a_2) \ldots G'(t_1) G'(t_2) \ldots}$$

$$= \Theta_1 \frac{G(a_1) G(a_2) \ldots G(a_\mu)}{G'(t_1) G'(t_2) \ldots G'(t_\mu)} \frac{\Pi(t_i - t_j) \Pi(a_i - a_j)}{\Pi(a_i - a_j)}$$

$$= \pm \Theta_1 \frac{G(a_1) \ldots G(a_\mu)}{G'(t_1) \ldots G'(t_\mu)} \frac{\Pi(t_i - t_j) \Pi(a_i - a_j)}{G(a_1) G(a_2) \ldots G(a_\mu)}.$$

Remplaçons les membres extrêmes de cette suite d'égalités par leurs degrés relatifs aux t; en appelant δ le degré de Θ_1, nous aurons

$$\mu n(m-1)=\delta,$$

car $\Pi(t_i-t_j)$ est égal, à un facteur constant près, à $G'(t_1)G'(t_2)\ldots$.

Ainsi Θ est de degré $\mu n(m-1)$.

Maintenant posons

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$$D_i = D(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}),$$

et considérons le quotient

$$\frac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_\mu};$$

le numérateur et le dénominateur sont de même degré $\mu n(m-1)$, Θ s'annule quand les équations (1) ont une solution double, le dénominateur $D_1 D_2 \ldots$ aussi, Θ et $D_1 D_2 \ldots$ sont nuls en même temps : donc Θ est divisible par $D_1 D_2 \ldots$, donc le quotient considéré ne contient pas les x_{ij}. On peut donc évaluer sa valeur numérique en donnant aux x_{ij} des valeurs arbitraires solutions d'équations de degré m. Prenons alors les x_{ij} égaux aux solutions des équations

(3) $\qquad \varphi_1=0, \qquad \varphi_2=0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n=0;$

θ_{ij} se réduit alors à

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots \\ 0 & \ldots \\ \cdot & \ldots \\ \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots) & \ldots \end{vmatrix} = \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)\lambda_{ij},$$

λ_{ij} désignant une quantité indépendante des coefficients

de φ_{n+1} ; on peut donc écrire

$$\Theta = \varphi_{n+1}(x_{11}, x_{21}, \ldots)\,\varphi_{n+1}(x_{12}, x_{22}, \ldots)\ldots\,\varphi_{n+1}(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \ldots)\,\Lambda,$$

Λ ne dépendant pas de φ_{n+1} ; donc Θ, *qui est de degré* μ *par rapport aux coefficients de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, *s'annule quand les équations*

$$(4) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n+1} = 0$$

ont une solution commune, et par suite

$$\Theta = 0$$

est la résultante des équations (1).

Il reste à prouver que Θ n'est pas identiquement nul; mais, avant d'établir ce point, je ferai observer que dans la pratique on pourra supposer

$$f_1 = (x_1 - x_{11})(x_1 - x_{12})\ldots(x_1 - x_{1m}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_n = (x_n - x_{n1})(x_n - x_{n2})\ldots(x_n - x_{nm});$$

le tableau des x_{ij} sera alors

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

Pour prouver que Θ n'est pas identiquement nul, il suffit de montrer que Λ n'est pas nul en général; or Λ est un déterminant dont l'élément général est de la forme $\xi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$, la valeur de ξ_i étant

$$\xi_i(x_1, x_2, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \cdots & \varphi^i_{1n} \\ \varphi^i_{21} & \varphi^i_{22} & \cdots & \varphi^i_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi^i_{n1} & \varphi^i_{n2} & \cdots & \varphi^i_{nn} \end{vmatrix},$$

les x_{ij} étant censés solutions de (4). Or ξ_i est nul pour

$x_1 = x_{ij}$, $x_2 = x_{2j}$, ... excepté pour $i = j$ et alors il se réduit à

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]_{x_1 = x_{1i}, \ldots} = \Delta_i;$$

le déterminant Λ est donc égal à $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_\mu$ qui n'est pas nul en général.

Maintenant supposons la fonction φ_{n+1} remplacée par $\psi z + \varphi_{n+1}$, z désignant une arbitraire et ψ une fonction de degré m; dans ce cas Θ devient

$$\Theta + z\Theta_1 + \ldots + z^\mu \Theta_\mu,$$

et l'équation

$$\Theta + z\Theta_1 + \ldots + z^\mu \Theta_\mu = 0$$

a pour racines les diverses valeurs que prend $-\frac{\varphi_{n+1}}{\psi}$ quand on y remplace les x par une solution des équations (3). Les coefficients de cette équation divisés par Θ_μ font alors connaître des fonctions symétriques des solutions de (3) et en particulier, si l'on suppose $\psi = 1$, φ_{n+1} successivement égal à $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, \ldots$. On peut ainsi se procurer très facilement ce que l'on appelle les *fonctions simples* et beaucoup d'autres.

On voit, en particulier, que les fonctions symétriques *entières* des solutions de (3) ne contiennent en dénominateur que Θ_μ et que leur numérateur est entier par rapport aux coefficients des φ. Or Θ_μ est la valeur que prend Θ quand on y fait $\varphi_{n+1} = 1$: c'est la quantité que nous avons désignée plus haut par Λ; elle est divisible par $D_1 D_2 \ldots D_\mu$. Rien n'empêche de supposer que l'on a enlevé ce facteur de Θ, mais alors Θ_μ est manifestement de poids nul et, pour l'évaluer, on peut supposer les fonctions φ réduites à leurs termes de degré m.

Il est bon d'observer que l'on peut déduire de la théorie précédente l'expression de ce que l'on appelle

les polynômes multiplicateurs; il suffit pour cela de supposer une solution des équations $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots,$ $f_n = 0$ variable, en la désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et en supposant que $x_1 = x_{1\mu}$, $x_2 = x_{2\mu}$, ... par exemple; la quantité Θ sera alors fonction de $x_1, x_2, \ldots,$ x_n. Or on a, en désignant $\theta_{i\mu}$ par θ_i,

$$\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1}\theta_1 + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_\mu}\theta_\mu,$$

et, en remplaçant $\theta_1, \theta_2, \ldots$ par leurs valeurs qui sont de la forme

$$\theta_i = \lambda_{i1}\varphi_1 + \lambda_{i2}\varphi_2 + \ldots,$$

on a

$$\Theta = \varphi_1\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_1}\lambda_{11} + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta_2}\lambda_{21} + \ldots\right) + \ldots.$$

Les coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ dans cette formule sont évidemment les polynômes multiplicateurs.

Supposons $\Theta = 0$, les équations (4) ont une solution commune, mais, le déterminant Θ étant nul, il doit exister une même relation linéaire entre les éléments d'une même rangée : on doit donc avoir des quantités ζ_1, $\zeta_2, \ldots,$ satisfaisant aux relations

$$\begin{gathered}\theta_{11}\zeta_1 + \theta_{12}\zeta_2 + \ldots + \theta_{1\mu}\zeta_\mu = 0,\\ \theta_{21}\zeta_1 + \theta_{22}\zeta_2 + \ldots + \theta_{2\mu}\zeta_\mu = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

quand les formules (4) ont une solution commune; dans le cas contraire, les premiers membres des équations précédentes ne sont pas nuls. On pourra prendre

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_\mu\\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2\mu}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \theta_{\mu 1} & \theta_{\mu 2} & \ldots & \theta_{\mu\mu}\end{vmatrix} : \Theta\\ &= \frac{1}{\Theta}\left(\theta_1\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{11}} + \theta_2\frac{\partial\Theta}{\partial\theta_{12}}\ldots\right), \qquad \zeta_2 = \ldots;\end{aligned}$$

les fonctions ζ jouiront alors de la propriété suivante :

1° ζ_i se réduira à un pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...;

2° ζ_i sera nul pour $i \gtrless j$ si $x_1 = x_{ij}$, $x_2 = x_{2j}$, ..., et l'on aura

$$\begin{gathered}\theta_{11}\zeta_1 + \theta_{12}\zeta_2 + \ldots + \theta_{1\mu}\zeta_\mu = \theta_1,\\ \theta_{21}\zeta_1 + \theta_{22}\zeta_2 + \ldots + \theta_{2\mu}\zeta_\mu = \theta_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{gathered}$$

ces équations, quand $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, ... font connaître les fonctions ζ de la solution commune aux équations (4).

Je ferai enfin observer que, si les mineurs de Θ sont nuls, les équations (4) ont une solution double; si les mineurs du second ordre de Θ sont nuls, elles ont une solution triple et ainsi de suite. On pourrait, en modifiant un peu cette méthode, indiquer le moyen de calculer la solution commune, mais les calculs théoriquement possibles ne seraient d'aucune utilité en pratique à cause de leur longueur.

La recherche de la résultante a jusqu'ici été subordonnée à la théorie des fonctions symétriques; dans ce qui précède je fais dépendre au contraire la théorie des fonctions symétriques de la théorie de l'élimination : le résultat est évidemment plus simple. Mais, même dans l'ancienne théorie, on n'était pas parvenu à mettre la résultante sous forme explicite; on peut combler cette lacune comme il suit :

Au point de vue pratique, le résultat que je vais indiquer n'a évidemment aucune valeur, car le calcul des fonctions symétriques restera toujours très laborieux; mais il peut avoir une certaine importance théorique; en tout cas, c'est l'expression d'une identité remarquable.

Supposons que

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{n\mu} \end{array}$$

soient les solutions des équations (4). Désignons par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\mu$ les différents termes du produit (en nombre μ)

$$(1+x_1+x_1^2+\ldots+x_1^{m-1})(1+x_2+x_2^2+\ldots+x_2^{m-1})\ldots \\ \times(1+x_n+x_n^2+\ldots+x_n^{m-1})$$

et par ω_{ij} la valeur que prend ω_i quand on fait $x_1=x_{1j}$, $x_2=x_{2j}, \ldots$. Désignons toujours par Δ le déterminant fonctionnel de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et par Δ_j la valeur qu'il prend pour $x_1=x_{1j}$, $x_2=x_{2j}$, ... Le déterminant $\Sigma\pm\omega_{11}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{\mu\mu}$ s'annule toutes les fois que deux solutions des équations (4) deviennent égales et il en est de même de $\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_\mu$; le carré du premier déterminant est de même degré : donc

$$(\Sigma\pm\omega_{11}\omega_{22}\ldots\omega_{\mu\mu})^2 = G\,\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_\mu,$$

G désignant une quantité indépendante des solutions de (4) et par suite ne dépendant que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les φ. Considérons alors les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^1\dfrac{\omega_{11}}{\Delta_1} & \varphi_{n+1}^1\dfrac{\omega_{21}}{\Delta_1} & \ldots & \varphi_{n+1}^1\dfrac{\omega_{\mu 1}}{\Delta_1} \\ \varphi_{n+1}^2\dfrac{\omega_{12}}{\Delta_2} & \varphi_{n+1}^2\dfrac{\omega_{22}}{\Delta_2} & \ldots & \varphi_{n+1}^2\dfrac{\omega_{\mu 2}}{\Delta_2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu}\omega_{\mu 1} & \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu}\omega_{\mu 2} & \ldots & \dfrac{\varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_\mu}\omega_{\mu 2} \end{vmatrix},$$

dans lesquels φ_{n+1}^i désigne, pour abréger,

$$\varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}) \quad \text{et} \quad \Sigma\pm\omega_{11}\omega_{22}\ldots\omega_{\mu\mu}$$

le premier est égal à

$$\frac{\varphi_{n+1}^1 \varphi_{n+1}^2 \cdots \varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n} \Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \ldots \omega_{\mu\mu};$$

leur produit sera donc $\varphi_{n+1}^1 \varphi_{n+1}^2 \cdots \varphi_{n+1}^\mu$, à un facteur près, qui ne dépend que des termes du degré le plus élevé dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; en égalant ce produit à zéro, on aura la résultante, qui est par conséquent

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi_{n+1} \omega_1^2}{\Delta} & \sum \frac{\varphi_{n+1} \omega_1 \omega_2}{\Delta} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \sum \frac{\varphi_{n+1} \omega_\mu^2}{\Delta} \end{vmatrix} = 0.$$

Tous les termes du déterminant sont des fonctions symétriques, calculables par la méthode de Jacobi. Ce résultat montre comment on peut arriver de proche en proche à former la résultante en passant successivement par des systèmes à deux, trois, etc. inconnues.

Les fonctions symétriques de Jacobi $\sum \frac{F}{\Delta}$ sont en général difficiles à calculer; il en est cependant un certain nombre qui sont nulles, ce qui dispense d'en faire le calcul; il y en a un certain nombre d'autres que l'on peut encore calculer pratiquement en évitant la méthode de Jacobi que l'on ne peut pas matériellement employer.

Posons

$$\varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) + (x_1 - x_{1j}) \varphi_{i1}^j + \ldots + (x_n - x_{nj}) \varphi_{in}^j,$$

$$\xi_i = \begin{vmatrix} \varphi_{11}^i & \varphi_{12}^i & \cdots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_{21}^i & \varphi_{22}^i & \cdots & \varphi_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}^i & \varphi_{n2}^i & \cdots & \varphi_{nn}^i \end{vmatrix} : \Delta_i.$$

Si l'on désigne par F une fonction quelconque de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, de degré inférieur à m et par F_i la valeur

qu'elle prend pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ..., on aura

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \ldots + F_\mu \xi_\mu,$$

en particulier

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu.$$

Si l'on fait l'identification des deux membres de la formule précédente, on trouve des formules qui sont des cas particuliers de la formule de Jacobi.

On peut donner à la résultante des équations (4) ou plutôt aux éléments du déterminant Θ une forme qu'il est bon d'indiquer : soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme entier, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des quantités quelconques. Posons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

$$F = \int_0^1 f(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,\frac{dt}{t},$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_0^1 f_1(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_0^1 f_2(c_1 + t\,\overline{x_1 - t_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en conclut

$$\begin{aligned}(x_1 - c_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} &+ (x_2 - c_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots \\ &= \int^1 \frac{\partial}{\partial t} f(c_1 + t\,\overline{x_1 - c_1},\ c_2 + t\,\overline{x_2 - c_2},\ \ldots)\,dt \\ &= f(x_1, x_2, \ldots) - f(c_1, c_2, \ldots).\end{aligned}$$

Il résulte de là que les fonctions que nous avons désignées par θ sont des déterminants fonctionnels, et si

l'on fait

$$\Phi_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x_{1j} + t\overline{x_1 - x_{1j}}, x_{2j} + t\overline{x_2 - x_{2j}}, \ldots) \frac{dt}{t} + x_{n+1}\varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots),$$

on aura

$$\theta_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \ldots, \Phi_{n+1,j})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}$$

au signe près.

RECONNAITRE SI UN POLYNOME A PLUSIEURS VARIABLES PEUT ÊTRE DÉCOMPOSÉ EN FACTEURS ENTIERS;

PAR M. H. LAURENT.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynômes entiers en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de degré m. Soient

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{n\mu} \end{matrix}$$

les $\mu = m^n$ solutions supposées finies et distinctes des équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0.$$

On peut poser

$$f_i = f_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) + f_{i1}^j(x_1 - x_{1j}) + \ldots + f_{in}^j(x_1 - x_{nj}),$$

$f_{i1}, f_{i2}, \ldots$ désignant des polynômes entiers de degré

$m - 1$ et cela d'une infinité de manières; posons alors

$$\xi_i = \begin{vmatrix} f_{11}^i & f_{12}^i & \cdots & f_{1n}^i \\ f_{21}^i & f_{22}^i & \cdots & f_{2n}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}^i & f_{n2}^i & \cdots & f_{nn}^i \end{vmatrix} : \left[\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]_{x_1 = x_{1i} \ldots}.$$

Les μ quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ jouiront des propriétés suivantes (nous supposerons toujours que ξ_i se change en ξ_j quand $x_{1i}, x_{2i}, \ldots$ se changent en $x_{1j}, x_{2j}, \ldots$, ce qui est évidemment permis) :

1° Entre les ξ il ne saurait exister de relations homogènes à coefficients constants. En effet, on peut remarquer que ξ_i est nul en même temps que les f, excepté pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ... et que pour ces valeurs des x il se réduit à l'unité; si l'on pouvait avoir

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_\mu\xi_\mu = 0;$$

en faisant $x_1 = x_1, x_2 = x_2, \ldots$, on aurait

$$a_1 = 0;$$

on verrait de même que

$$a_2 = 0, \qquad \ldots;$$

2° Si l'on a

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots = b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots,$$

$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ étant des constantes, on en conclura

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad \ldots;$$

3° Si l'on désigne par F un polynôme entier en x qui prenne pour $x_{1i}, x_{2i}, \ldots$ la valeur F_i quel que soit i, on aura

$$F = F_i\xi_1 + F_2\xi_2 + \ldots + F_\mu\xi_\mu,$$

le signe $\equiv$ désignant une égalité dans laquelle on néglige des multiples de $f_1, f_2, \ldots, f_n$; en effet, les deux membres de la formule précédente sont égaux quand les f sont nuls.

$D_i \xi_i$ est de degré $n(m-1)$ en $x_{1i}, x_{2i}, \ldots$. D_i désignant la valeur de

$$D = \frac{\partial(f_1 \ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}$$

pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ..., les termes de $D_i \xi_i$ qui contiennent x_1, x_2. ... ou x_n sont de degré inférieur : donc, d'après un théorème connu de Jacobi, dans la somme $\Sigma \xi_i$ tous les termes contenant les variables x_1, x_2, ... seront nuls; ainsi $\Sigma \xi_i$ ne dépend pas des x; or pour des valeurs des x annulant les f, $\Sigma \xi_i$ est égal à un, donc;

4° On a la relation

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu = 1; \tag{2}$$

5° De (2) on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \ldots + \xi_1 \xi_\mu = \xi_1, \\ \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_2 \xi_\mu = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right. \tag{3}$$

6° $\xi_i \xi_j$ est nul en même temps que les f, ξ_i^2 aussi, excepté pour $x_1 = x_{i1}$, $x_2 = x_{2i}$, ... et alors il est égal à un; on a donc

$$\xi_i \xi_j \equiv 0, \qquad \xi_i^2 \equiv \xi_i.$$

Cela posé, considérons un polynôme F de degré $m-1$ au plus; on peut poser

$$F = F(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)(x_1 - x_{1i}) F_1^i + \ldots + (x_n - x_{ni}) F_n^i,$$

F_1^i, F_2^i, ... désignant des polynômes de degré inférieur

à $m - 1$ et l'on aura, en posant

$$F_i = F(x_{1i}, x_{2i}, \ldots),$$

$$\begin{vmatrix} F - F_1 & F_1^i & F_2^i & \ldots & F_n^i \\ f_1 & f_{11}^i & \ldots & \ldots & f_{1n}^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & f_{n1}^i & \ldots & \ldots & f_{nn}^i \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$(F - F_i)\xi_i D_i = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ désignant des polynômes de degré inférieur à $n(m-1)$; on en tire

$$(F - F_i)\xi_i = \frac{\lambda_1}{D_i} f_1 + \ldots + \lambda_n \frac{f_n}{D_i}.$$

Si dans cette formule on fait $i = 1, 2, \ldots$ et si l'on ajoute les résultats obtenus, on aura, en vertu du théorème de Jacobi déjà invoqué,

$$\Sigma(F - F_i)\xi_i = 0$$

et, en vertu de (2),

(4) $$F = F_1\xi_1 + F_2\xi_2 + \ldots + F_\mu\xi_\mu.$$

Le signe $=$ devrait être remplacé par $\equiv$ si le degré de F surpassait $m - 1$.

Supposons que le polynôme F de $m - 1$ soit le produit de deux facteurs φ, ψ des degrés n, p, $n + p < m$, on aura

$$\varphi - \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \ldots + \varphi_\mu\xi_\mu,$$
$$\psi - \psi_1\xi_1 + \psi_2\xi_2 + \ldots + \psi_\mu\xi_\mu,$$

φ_i, ψ_i désignant $\varphi(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)$ et $\psi(x_{1i}, x_{2i}, \ldots)$ et par suite

$$\varphi\psi = F = \Sigma\varphi_i\psi_i\xi_i^2 + \Sigma\varphi_i\psi_j\xi_i\xi_j;$$

remplaçons dans cette formule ξ_i^2 par sa valeur tirée

de (3), nous aurons

$$\varphi\psi = F = \Sigma\varphi_i\psi_i\xi + \Sigma\xi_i\xi_j(\varphi_i\psi_j + \psi_i\varphi_j - \varphi_i\psi_i - \psi_i\psi_j),$$

et, en vertu de (4),

$$\Sigma\xi_i\xi_j(\varphi_i\psi_j + \psi_i\varphi_j - \varphi_i\psi_j - \varphi_j\psi_j) = 0;$$

c'est une relation entre les ξ_i, ξ_j : il existera ainsi entre ces quantités une infinité de relations, mais il est clair qu'elles ne seront pas toutes distinctes.

Dans la pratique, il conviendra de prendre

$$f_1 = (x_1 - a_1)(x_1 - a_2)\ldots(x_1 - a_m),$$
$$f_2 = (x_2 - b_1)(x_2 - b_2)\ldots(x_2 - b_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

alors les ξ_i seront de la forme

$$\frac{f_1 f_2 \ldots f_n}{f'_1(a_i)f'_2(b_j)\ldots} = \frac{1}{x_1 - a_1}\,\frac{1}{x_2 - b_j}\cdots.$$

Pour former les relations identiques du second degré entre les ξ_i nous calculerons les ξ_i, ξ_j en observant qu'ils sont égaux à des sommes de fractions simples, abstraction faite du facteur $f_1^2 f_2^2 \ldots$ et qu'ils sont par suite exprimables linéairement en fonction de quantités de la forme $f_1 f_2 f_n \ldots \xi$ pourvu qu'ils ne contiennent pas en dénominateur de facteur carré.

Considérons d'abord les produits $\xi_i\xi_j$, dans lesquels les lettres a, b, c, ... n'entrent qu'avec les indices 1, 2; l'un d'eux contiendra en dénominateur

$$\frac{1}{(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)(x_2 - b_1)(x_2 - b_2)\ldots};$$

ce produit que l'on peut obtenir en prenant les facteurs ξ de plusienrs manières est le seul que l'on pourra utiliser : il en résulte l'égalité de plusieurs produits de la forme $\xi_i\xi_j$; ces produits sont au nombre de $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$,

et fournissent $2^{n-1}-1$ relations entre les ξ_i, ξ_j; mais, au lieu de combiner les lettres portant les indices 1, 2, on peut choisir deux indices quelconques : le nombre total des résultats obtenus sera $2^{n-1}-1$ multiplié par le nombre de combinaisons de mn lettres où il y aura deux a, deux b, etc., c'est-à-dire $\frac{C_{mn}^{2n}}{2^n}$. Ce n'est pas tout : nous avons dit que les produits $\xi_i \xi_j$ s'exprimaient linéairement au moyen des $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ξ_i entre les relations qui expriment les $\xi_i \xi_j$; on pourra en général éliminer les $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ξ_i, ce qui fournira de nouvelles identités entre les $\xi_i \xi_j$.

Quels que soient les polynômes f dont on fera usage, les identités entre les $\xi_i \xi_j$ ne renfermeront pas les ξ_i^2, car devant avoir lieu pour $x_1 = x_{11}$, $x_2 = x_{21}$, ... leurs coefficients seront nuls, etc.

Lorsque l'on aura formé les identités entre les $\xi_i \xi_j$, il sera facile de résoudre la question suivante :

Étant donné un polynôme F *de degré* $m-1$, *reconnaître s'il est réductible et dans ce cas le décomposer en facteurs entiers.*

Pour cela on ajoutera à l'identité

$$F = \Sigma F_i \xi_i \Sigma \xi_i = \Sigma \xi_i \xi_j (F_i + F_j),$$

toutes les identités qui ont lieu entre les ξ_i, ξ_i respectivement multipliées par des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. F prendra la forme

$$F = \Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

où les a_{ij} contiennent les λ linéairement. S'il existe alors des valeurs non nulles des λ pour lesquelles Σa_{ij}, $\xi_i \xi_j$ se réduise à une somme de deux carrés, F ne sera pas irréductible, et réciproquement si F est le produit de deux facteurs entiers Σa_{ij}, $\xi_i \xi_j$ pour des valeurs

convenables des λ, se réduira à une somme de carrés : il y aura autant de systèmes de valeurs de λ satisfaisant à cette condition que de manières de décomposer F en facteurs entiers.

Pour exprimer que F est une somme de deux carrés, il faut écrire qu'une certaine équation bien connue

$$\Sigma \pm (a_{11} - s) \ldots (a_{\mu\mu} - s) = 0$$

a $\mu - 2$ racines nulles, ce qui fait $\mu - 2$ conditions à écrire et, comme F n'est généralement pas un produit, le nombre des λ est inférieur à $\mu - 2$: le nombre des identités entre les $\xi_i \xi_j$ est donc inférieur à $\mu - 2$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

Étant donnés deux axes rectangulaires et sur l'axe des x deux points A, B dont les abscisses sont a et b, sur l'axe des y un point C dont l'ordonnée est c, on considère le faisceau des hyperboles équilatères qui passent par les trois points A, B, C.

1° Former l'équation de celle de ces hyperboles qui a une asymptote dont le coefficient angulaire est un nombre donné λ, et former l'équation de cette asymptote.

Par un point quelconque du plan on peut mener une ou trois droites telles que chacune soit une asymptote d'une des hyperboles considérées. Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux d'entre elles sont rectangulaires. Construire ce lieu, indiquer les points où il rencontre les côtés du triangle ABC; puis, prenant un point quelconque M sur ce lieu, trouver le centre de chacune des

hyperboles considérées qui a une asymptote passant par ce point M.

2° Former l'équation de celle des hyperboles considérées qui a un axe dont le coefficient angulaire est un nombre donné μ, et former l'équation de cet axe.

Par un point quelconque du plan on peut mener une ou trois droites telles que chacune soit un axe d'une des hyperboles considérées.

Former l'équation du lieu des points par lesquels passent trois droites qui satisfont à cette condition, et qui de plus sont telles que deux de ces droites ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires. Construire la ligne représentée par cette équation ; et, sur cette ligne, limiter les parties sur lesquelles doit être un point pour que, par ce point, passent *trois droites réelles* satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Calcul trigonométrique.

Calculer les côtés et les angles d'un triangle dont on donne les médianes α, β, γ, issues respectivement des sommets A, B, C du triangle

$$\alpha = 120000,$$
$$\beta = 90000,$$
$$\gamma = 60000.$$

Physique.

I. Un thermomètre pesant A grammes ne pèse plus que B grammes dans l'eau. Déduire de ces données le poids approximatif de mercure qu'il contient.

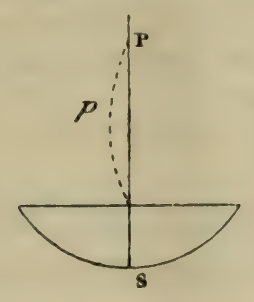
Application numérique :

Poids spécifique du mercure...... $\delta = 13,6$
Poids spécifique du verre......... $d = 2,4$

$$A = 23^{gr},76, \qquad B = 20^{gr},04.$$

II. Dans un miroir concave de rayon R dont l'axe est vertical on a versé un liquide. Sur l'axe à distance p est une source monochromatique P ; l'indice du liquide pour les radiations qu'elle émet est n.

On demande d'établir la formule qui permet de calculer la distance p' à laquelle se formera le foyer conjugué P' du



point P pour les rayons centraux, le système optique étant supposé sans épaisseur.

Chimie.

I. Des propriétés chimiques du chlore. Insister tout spécialement sur les réactions d'addition, de substitution et d'oxydation données par ce métalloïde.

II. Établir la formule de l'acide chlorhydrique. Vérifier la formule trouvée par la considération du poids moléculaire, connaissant la densité 1,27 du gaz chlorhydrique.

Épure.

L'axe d'un cône de révolution supposé plein est situé dans le plan horizontal de projection ; on considère les deux demi-nappes de ce cône situées au-dessus du plan horizontal et limitées à des plans parallèles ; on les coupe par un cylindre oblique à base de cercle ; on enlève du cône les parties situées dans l'intérieur du cylindre. On demande de représenter par ses projections le demi-cône solide dans lequel on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.

L'axe du cône est la bissectrice de l'angle en s du triangle par l'axe asb.

Le côté ab coïncide avec la ligne de terre, et l'on a

$$xa = 0^{m},076, \qquad ab = 0^{m},129, \qquad by = 0^{m},065,$$
$$as = 0^{m},149, \qquad bs = 0^{m},179.$$

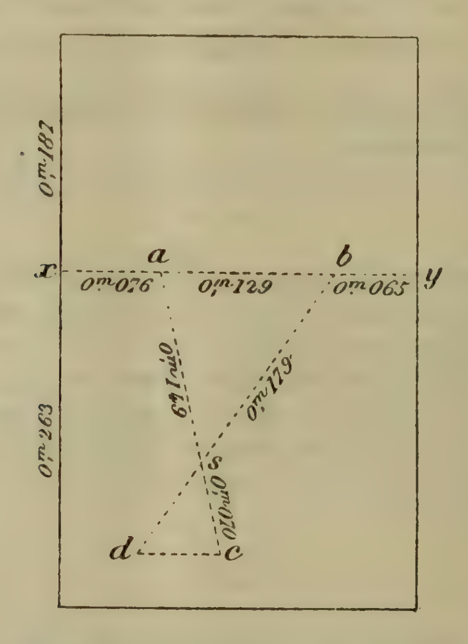
Les plans parallèles qui limitent le cône sont les suivants :

1° Le plan mené par la ligne de terre et dont la partie supérieure fait avec la partie antérieure du plan horizontal un angle de 60°;

2° Le plan parallèle au précédent dont la trace horizontale *cd* est déterminée par

$$sc = 0^{m},070.$$

La base du cylindre est un cercle de 0m,060 de rayon, situé



dans le plan vertical de projection au-dessus de la ligne de terre et tangent en *b* à cette ligne; les génératrices horizontales du cylindre sont parallèles à *sb*.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point;

2° Un point quelconque de l'une des bases du cône et la tangente en ce point;

3° Un point quelconque de la trace du cylindre sur l'un des plans de base du cône et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Cône entaillé par un cylindre.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur. Le cadre a $0^m,450$ sur $0^m,270$.

La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,263$ du petit côté inférieur et à $0^m,187$ du petit côté supérieur.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1893;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais, comme je le fais depuis plusieurs années, présenter à quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* une solution du problème de Mécanique proposé au dernier concours d'agrégation des Mathématiques : elle s'obtient bien facilement. Résumons l'énoncé.

Le périmètre ABC d'une plaque pesante contient un segment rectiligne AB assujetti à rester sur un plan fixe horizontal P, sur lequel il peut glisser sans frottement : la plaque, d'abord immobile, est abandonnée à l'action de son poids. On demande la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AB reste parallèle à elle-même. Cette condition est satisfaite pour une plaque homogène ayant la forme d'un demi-cercle dont AB serait le diamètre limite : en supposant AB égal à 2^m et l'angle initial de la plaque avec l'horizon égal à $30°$, on demande une limite inférieure et une limite supérieure du temps que la plaque met pour arriver en coïncidence avec le plan P.

Dans le plan de la plaque et par son centre de gravité, menons deux axes Gx, Gy, le premier parallèle, l'autre perpendiculaire à AB; la direction positive

de Gy est telle que l'ordonnée des divers points de AB ait une valeur négative $-h$. Soient M la masse de la plaque, m celle d'un de ses éléments dont le centre de gravité a pour coordonnées x, y; nous poserons

$$A = \Sigma\, my^2, \qquad B = \Sigma\, mx^2, \qquad F = \Sigma\, mxy.$$

Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont les deux premiers sont dans le plan P; GX_1, GY_1, GZ_1 des axes parallèles aux premiers, menés par le centre de gravité de la plaque : la position de celle-ci peut être déterminée par l'angle θ que fait son plan avec GX_1Y_1 ou avec le plan P, l'angle ψ de Gx avec GX_1, enfin par les coordonnées ξ, η, ζ du point G par rapport aux axes fixes; ζ est égal à $h\sin\theta$.

On obtient la condition demandée en considérant le mouvement relatif de la plaque par rapport aux axes GX_1, GY_1, GZ_1 : relativement à GZ_1, le poids et les réactions exercées le long de AB ont des moments nuls; la somme μ des moments des quantités de mouvement relatif autour de GZ_1 doit être constante.

Si AB conserve une direction fixe, ψ sera constant et nous pouvons le supposer nul; on a alors, pour les coordonnées de l'élément m,

$$X_1 = x, \qquad Y_1 = y\cos\theta, \qquad Z_1 = y\sin\theta,$$

d'où

$$\mu = \Sigma\, m\left(X_1\frac{dY_1}{dt} - Y_1\frac{dX_1}{dt}\right) = -F\sin\theta\frac{d\theta}{dt};$$

à l'instant initial, μ est nul : il restera donc égal à zéro. Or $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut être constamment nul que si la plaque est en équilibre et cela exige évidemment que θ soit d'abord égal à $\pm\frac{\pi}{2}$; à cette condition, AB restera immobile, quelle que soit la constitution de la plaque. On

peut, à un certain point de vue, supposer que $\sin\theta$ reste nul, la plaque restant couchée sur le plan fixe; c'est une position d'équilibre possible, à condition, toutefois, de supposer que toute la plaque, et non pas seulement la droite AB, puisse être retenue par le plan P. En mettant à part ces deux cas exceptionnels d'équilibre, la condition générale pour que μ reste nul et ψ constant, c'est que F, ou Σmxy, soit nul, c'est-à-dire que Gx et Gy soient les axes principaux de la plaque en son centre de gravité.

On peut retrouver cette condition, s'assurer qu'elle est suffisante et, en outre, déterminer le mouvement de la plaque au moyen des équations de Lagrange, toujours si précieuses. La force vive de la plaque est, d'après le théorème de Kœnig,

$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \Sigma m(X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2);$$

or on a, ψ étant quelconque,

$$\begin{aligned} X_1 &= x\cos\psi - y\cos\theta\sin\psi, \\ Y_1 &= x\sin\psi + y\cos\theta\cos\psi, \\ Z_1 &= y\sin\theta; \end{aligned}$$

d'où, par un calcul des plus faciles,

$$\begin{aligned} 2T = {} & M(\xi'^2 + \eta'^2 + h^2\theta'^2\cos^2\theta) \\ & + A(\theta'^2 + \psi'^2\cos^2\theta) + B\psi'^2 - 2F\theta'\psi'\sin\theta. \end{aligned}$$

Le travail virtuel, pour un déplacement compatible avec les liaisons, des forces agissant sur la plaque est $-Mgh\cos\theta\,\delta\theta$ et les équations de Lagrange prennent la forme

$$(1) \qquad \frac{d\xi'}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}(A\psi'\cos^2\theta + B\psi' - F\theta'\sin\theta) = 0,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & (A + Mh^2\cos^2\theta)\theta'' - Mh^2\theta'^2\sin\theta\cos\theta \\ & \qquad - F\psi''\sin\theta + A\psi'^2\sin\theta\cos\theta = -Mgh\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Pour que ψ' soit constamment nul, l'équation (2) montre que $F\theta' \sin\theta$ doit être constant et, par suite, nul d'après les conditions initiales : c'est le résultat que nous avons obtenu et interprété tout à l'heure. D'ailleurs, avec $\psi' = 0$, les équations de Lagrange et les conditions initiales peuvent être satisfaites pour des valeurs de ξ, η, θ que nous trouverons bientôt; le mouvement dans lequel AB garderait une direction fixe est donc possible : suivant l'un des principes de la Dynamique, il aura certainement lieu.

Les équations (1), avec la condition que ξ'_0 et η'_0 soient nuls, montrent que le centre de gravité G reste sur une même verticale, fait aisé à voir directement. En supposant ψ' nul, les deux membres de l'équation (3), multipliés par $2\theta'$, sont des dérivées exactes : intégrant et se rappelant que θ'_0 est nul, on trouve

$$(4)\qquad (A + M h^2 \cos^2\theta)\,\theta'^2 = 2Mgh(\sin\theta_0 - \sin\theta);$$

cette équation, qui se déduirait de l'intégrale des forces vives, permet d'obtenir t par une quadrature en fonction de θ.

Dans le cas d'une plaque semi-circulaire homogène, l'axe de symétrie Gy est visiblement axe principal pour tous ses points et le mouvement considéré aura lieu. Le rayon du demi-cercle étant égal à l'unité, on sait, ou l'on trouve aisément, que h est égal à $\frac{4}{3\pi}$ et le rayon de giration autour de AB, à $\frac{1}{2}$; d'où, par une relation bien connue,

$$A = M\left(\frac{1}{4} - h^2\right) = \frac{M}{4}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right).$$

Divisant tous les termes de l'équation (4) par M et faisant $\sin\theta_0$ égal à $\frac{1}{2}$, on trouve

$$\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\sin^2\theta\right)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{16g}{3\pi}(1 - 2\sin\theta);$$

résolvons par rapport à dt et intégrons en faisant varier θ de $\frac{\pi}{6}$ à o : si nous représentons $\frac{16}{9\pi^2}$ par h^2, nous aurons, pour le temps que la plaque met à tomber sur le plan P,

$$(5)\qquad t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} - \frac{\sqrt{1-4h^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-2\sin\theta}}\,d\theta.$$

On demande enfin une limite inférieure et une limite supérieure de t_1 : la question est embarrassante en ce sens qu'elle comporte une infinité de réponses. On peut donner pour limites de t_1 zéro et l'infini ; ce sont au moins les plus faciles à trouver. Voici, toutefois, comment on en peut obtenir de plus rapprochées. Transformons l'intégrale (5) en posant $\sin\theta = \frac{1}{2}\cos\varphi$: on a

$$d\theta = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\cos^2\varphi}},\qquad 1-2\sin\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Quand θ varie de $\frac{\pi}{6}$ à o, φ croît de o à $\frac{\pi}{2}$ et l'on trouve

$$(6)\qquad t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2g}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-h^2\cos^2\varphi}{1-\frac{1}{4}\cos^2\varphi}}\cos\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi.$$

On reconnaît aisément que la valeur du radical croît avec celle de $\cos^2\varphi$; elle est donc comprise entre 1 et $\sqrt{\frac{4}{3}(1-h^2)}$, soit environ 1,04554. Comme on a d'ailleurs

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi = \sqrt{2},$$

il en résulte que t_1 est compris entre $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$ et le pro-

duit de cette quantité par $\sqrt{\frac{4}{3}(1-h^2)}$. On peut avoir des limites plus rapprochées si l'on remarque que le radical de l'intégrale (6) est compris entre $1+a\cos^2\varphi$ et $1+b\cos^2\varphi$, où l'on a posé

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-h^2\right),\qquad b=\sqrt{\frac{4}{3}(1-h^2)}-1;$$

ces inégalités se démontrent sans peine en considérant les carrés des quantités que l'on compare : comme on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi=\frac{8}{15}\sqrt{2},$$

t_1 est compris entre les produits de $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$ par $1+\frac{8}{15}a$ et par $1+\frac{8}{15}b$, soit environ par 1,01863 et 1,02429. On pourrait obtenir une infinité de systèmes de limites, aussi resserrées que l'on voudrait. On peut remarquer que si le point G tombait comme un point pesant libre, le temps de sa chute serait $\frac{2}{3\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{g}}$; il est moindre que la première des limites inférieures données pour t_1.

ÉCOLE NAVALE (CONCOURS DE 1895). SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

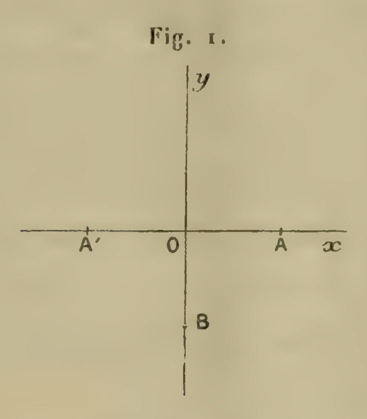
PAR M. E.-N. BARISIEN.

Oxy étant deux axes rectangulaires, et A, A', B trois points situés sur ces axes à une même distance de l'origine, disposés comme l'indique la figure

$$OA=OA'=OB=R:$$

1° *Équation des paraboles circonscrites au triangle* AA′B, *en prenant comme paramètre variable le coefficient angulaire m de l'axe*

Fig. 1.



Par chaque point du plan passent deux de ces paraboles : distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles.

Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une circonférence (C).

Construire en coordonnées polaires le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O *sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle* ABA′.

2° *Lorsqu'un point* M *décrit la circonférence* (C), *le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.*

3° *L'hyperbole équilatère, circonscrite au triangle* ABA′ *et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point* M *de la circonrence* (C), *passe par ce point* M.

L'équation générale des paraboles, ayant un axe de coefficient angulaire m, est

$$(y - mx + \lambda)^2 = \rho(x + my + \mu)$$

ou, en développant,

$$(y - mx)^2 + (2\lambda - \rho m)y - (2\lambda m + \rho)x + \lambda^2 - \rho\mu = 0.$$

Exprimons que cette parabole passe par les points A et A′ : on trouve, en faisant $y = 0$, les deux relations

(1) $$2\lambda m + \rho = 0,$$

(2) $$\lambda^2 - \rho\mu = -m^2 R^2.$$

On trouve de même, en exprimant que la parabole passe par B′, la relation

(3) $$R^2 - R(2\lambda - \rho m) + \lambda^2 - \rho\mu = 0,$$

ou, d'après (3),

(4) $$2\lambda - \rho m = R(1 - m^2).$$

Les relations (1), (2) et (4) permettent de déterminer λ, ρ et μ en fonction de m.

La valeur de λ seule nous intéresse : elle a pour expression

$$\lambda = \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)}.$$

En tenant compte de (1), (2) et (4), l'équation générale des paraboles devient

(5) $$(y - mx)^2 + (1 - m^2)Ry - m^2 R^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit, en l'ordonnant par rapport à m,

(6) $$m^2(x^2 - Ry - R^2) \quad 2mxy + y^2 + Ry = 0.$$

Donc, par un point (x, y) du plan, il passe deux paraboles répondant aux deux valeurs de m fournies par (6). Les deux paraboles seront réelles si l'on a

$$x^2y^2 - (y^2 + Ry)(x^2 - Ry - R^2) \geqq 0$$

ou

$$y(y + x + R)(y - x + R) \geqq 0.$$

On voit donc que si le point est à l'intérieur du triangle ABA' ou dans le prolongement des angles de ce triangle, les paraboles sont imaginaires. Lorsque le point est dans le reste du plan, les paraboles sont réelles.

Lieu des points pour lesquels les axes des deux paraboles sont rectangulaires. — Si m' et m'' sont les racines de (6), on doit avoir

$$m'm'' = -1$$

et, par conséquent,

$$\frac{y^2 + Ry}{x^2 - Ry - R^2} = -1$$

ou

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Le lieu de ces points est donc le cercle de centre O et de rayon R.

Lieu de la projection du point O *sur les axes des paraboles.* — L'axe d'une des paraboles a pour équation

$$y - mx + \lambda = 0$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad y - mx + \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)} = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de O sur cet axe a pour équation

$$(8)\qquad my + x = 0.$$

En éliminant m entre (7) et (8), on trouve l'équation

$$2(x^2 + y^2)^2 + Ry(y^2 - x^2) = 0.$$

C'est une quartique dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{R}{2} \sin\theta \cos 2\theta.$$

Cette courbe fermée a pour axe de symétrie l'axe des y : le point O est un point triple ([1]). C'est un trifolium dont le rayon maximum de la plus grande boucle est $\frac{R}{2}$ et le rayon maximum des deux autres boucles est $\frac{R}{3\sqrt{6}}$.

2° Soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M de la circonférence (C). On a donc

$$(9) \qquad x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

L'équation (6) devient alors

$$m^2(x_1^2 - Ry_1 - R^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 + Ry_1 = 0$$

ou, en tenant compte de (9),

$$(10) \qquad m^2(y_1 + R) + 2mx_1 - (y_1 + R) = 0.$$

Si m' et m'' sont les deux racines de (10), les équations des axes des deux paraboles passant par M sont

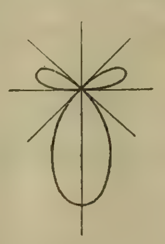
$$(11) \qquad y - m'x + \frac{(1 - m'^2)R}{2(1 + m'^2)} = 0,$$

$$(12) \qquad y - m''x + \frac{(1 - m''^2)R}{2(1 + m''^2)} = 0.$$

L'équation (10) fournirait m' et m'' en fonction de x_1 et y_1, et il resterait à éliminer x_1 et y_1 entre (9), (11) et (12). On évitera cette élimination laborieuse en remar-

---

([1]) Ce trifolium offre en outre la propriété remarquable d'avoir



son aire équivalente au $\frac{1}{32}$ de l'aire du cercle de rayon R.

quant que l'équation

$$(13)\qquad y - mx + \frac{(1-m^2)R}{2(1+m^2)} = 0$$

doit admettre les racines m' et m'' de (10). Cette équation (13) peut s'écrire

$$(14)\qquad 2m^3x - (2y - R)m^2 + 2mx - (2y + R) = 0.$$

Si m''' est la troisième racine de (14), on a

$$(15)\qquad (m' + m'') + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16)\qquad (m' + m'')m''' + m'm'' = 1,$$

$$(17)\qquad (m'm'')m''' = \frac{2y + R}{2x}.$$

Mais, d'après (10),

$$m' + m'' = -\frac{2x_1}{y_1 + R}, \qquad m'm'' = -1.$$

Les équations (15), (16) et (17) deviennent alors

$$(15)'\qquad \frac{-2x_1}{y_1 + R} + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16)'\qquad m''' = -\frac{y_1 + R}{x_1},$$

$$(17)'\qquad m''' = -\frac{2y + R}{2x}.$$

En portant la valeur (17)′ de m''' dans (15)′, il vient

$$(18)\qquad \frac{x_1}{y_1 + R} = -\frac{y}{x}.$$

En comparant (16)′ et (17)′, on a

$$(19)\qquad \frac{y_1 + R}{x_1} = \frac{2y + R}{2x}.$$

En multipliant membre à membre (18) et (19), on trouve

$$x^2 + y^2 + \frac{Ry}{2} = 0.$$

C'est un cercle de rayon $\frac{R}{4}$, tangent à l'origine.

3° L'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA′B a pour équation

$$(20) \qquad x^2 - y^2 + 2Bxy - 2Ry - R^2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des axes de cette hyperbole est

$$(21) \qquad m^2 + \frac{2m}{B} - 1 = 0;$$

d'où

$$B = \frac{2m}{1 - m^2}.$$

Par conséquent l'équation (20) devient

$$(22) \qquad x^2 - y^2 + \frac{4mxy}{1 - m^2} - 2Ry - R^2 = 0.$$

Cette hyperbole équilatère a ses axes parallèles à ceux de la parabole (5).

Or, si l'on fait $x^2 = R^2 - y^2$ dans les équations (22) et (5), on trouve qu'elles sont identiques. Donc, si la parabole (5) passe par un point de la circonférence (C), l'hyperbole (22) passe par le même point.

SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS DANS LE TRIANGLE ET NOTAMMENT SUR CERTAINE TRANSFORMATION QUADRATIQUE BIRATIONNELLE ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Dans l'étude des transformations géométriques qui sont liées à la considération d'un triangle, on fait très généralement usage du système des coordonnées trilinéaires ou de celui, équivalent au fond, des coordonnées barycentriques. Ce choix s'explique aisément, en raison du rôle fondamental joué par le triangle dans ces transformations, surtout lorsque le mode de liaison adopté fait intervenir symétriquement les éléments primordiaux, côtés ou angles, du triangle, comme c'est le cas pour les transformations dites *isotomique* et *isogonale*.

Mais l'habitude prise de ce genre de méthode ne doit pas faire perdre de vue les avantages qu'on peut, le cas échéant, retirer de l'emploi d'autres systèmes de coordonnées et notamment de celui des coordonnées générales dont j'ai eu l'occasion de signaler ici même [1] l'importance à un point de vue, en quelque sorte, philosophique.

Le but de la présente Note est de mettre ce fait en relief par quelques considérations générales appuyées d'un exemple particulier.

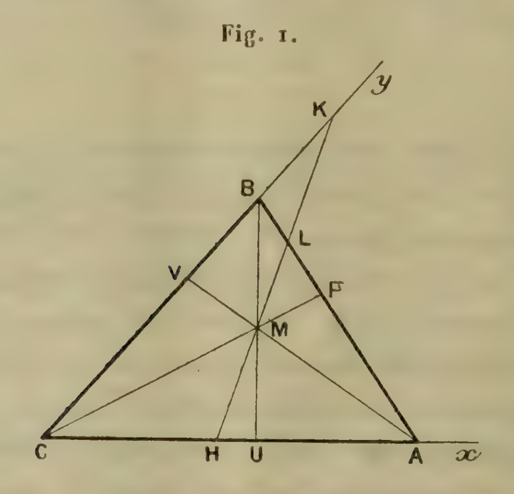
[1] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI, p. 72.

I. — Généralités.

2. Je rappellerai d'abord la définition des coordonnées en question.

Soit M un point quelconque pris dans le plan du triangle fondamental ABC (*fig.* 1). Tirons les droites

Fig. 1.



AM et BM qui coupent respectivement CB et CA en V et en U, et posons, en représentant par λ et μ des constantes quelconques pour toute l'étendue du plan,

$$x = \lambda \frac{\mathrm{UC}}{\mathrm{UA}}, \qquad y = \mu \frac{\mathrm{VC}}{\mathrm{VB}};$$

x et y sont les coordonnées du point M.

Le théorème de Jean de Ceva montre, en outre, que si la droite CM coupe AB en P, on a

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = -\frac{\lambda}{\mu}\frac{y}{x}.$$

Dans ce système de coordonnées, toute équation du premier degré représente une droite et réciproquement.

On démontre bien facilement que si l'équation d'une

droite s'écrit

$$ax + by + c = 0,$$

et si cette droite coupe les droites CA, CB et AB respectivement aux points H, K et L, on a

$$\frac{HC}{HA} = -\frac{1}{\lambda}\frac{c}{a}, \qquad \frac{KC}{KB} = -\frac{1}{\mu}\frac{c}{b}, \qquad \frac{LA}{LC} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{a}{b}.$$

Il en résulte que si, pour plusieurs droites, l'un des rapports $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ ou $\frac{a}{b}$ est constant, ces droites passent toutes par un même point de la droite CA, de la droite CB ou de la droite AB.

Si a, b ou c est nul, la droite correspondante passe par le point A, B ou C.

En posant, comme je l'ai proposé dans la Note citée,

$$u = -\frac{1}{\lambda}\frac{HA}{HC}, \qquad v = -\frac{1}{\mu}\frac{KB}{KC},$$

et prenant u et v comme coordonnées de la droite HK, on voit que la condition pour que le point (x, y) se trouve sur la droite (u, v) s'écrit

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Le théorème des transversales montre, en outre, que si la droite HK coupe AB en L, on a

$$\frac{LA}{LB} = \frac{\lambda u}{\mu v}.$$

Grâce à ces définitions, l'usage que l'on peut faire de ces coordonnées généralisées est identiquement le même que celui que l'on est dans l'habitude de faire des coordonnées cartésiennes et pluckériennes; seule l'interprétation géométrique des résultats diffère.

En particulier, l'équation de la tangente au point (X, Y) de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est

$$(y - Y)f'_Y + (x - X)f'_X = 0.$$

Toute équation du $n^{\text{ième}}$ degré en x et y définit une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, et toute équation du $n^{\text{ième}}$ degré en u et v, une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe.

3. On voit immédiatement à quel genre de transformations s'appliquera spécialement le système de coordonnées en question.

Soient M et M' deux points pris dans le plan du triangle ABC. Les droites AM et AM' coupant CB en V et en V', les droites BM et BM' coupant CA en U et en U', supposons que l'on ait

$$\varphi\left(\frac{UC}{UA}, \frac{U'C}{U'A}, \frac{VC}{VB}, \frac{V'C}{V'B}\right) = 0,$$
$$\psi\left(\frac{UC}{UA}, \frac{U'C}{U'A}, \frac{VC}{VB}, \frac{V'C}{V'B}\right) = 0.$$

Nous définissons ainsi une transformation qui fait correspondre le point M' au point M.

Faisant usage des coordonnées ci-dessus définies, nous voyons que l'étude analytique de la transformation considérée se ramènera au système d'équations

$$(1)\qquad \varphi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\lambda}, \frac{y}{\mu}, \frac{y'}{\mu}\right) = 0, \qquad \psi\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{x'}{\lambda}, \frac{y}{\mu}, \frac{y'}{\mu}\right) = 0,$$

dans lequel nous pourrons encore disposer de λ et de μ en vue de la plus grande simplicité possible.

Voici des exemples :

1° *Transformation isotomique.* — Ici, on a

$$\frac{UC}{UA} = \frac{U'A}{U'C}, \qquad \frac{VC}{VB} = \frac{V'B}{V'C}.$$

Il est, dès lors, tout naturel de prendre $\lambda = \mu = 1$,

et les équations de la transformation deviennent

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{1}{y'}.$$

2° *Transformation isogonale.* — Dans cette transformation l'angle CBU est égal à l'angle U'BA et l'angle CAV à l'angle V'AB. Or, on a

$$\frac{\sin \mathrm{CBU}}{\sin \mathrm{UBA}} = \frac{\mathrm{CU.AB}}{\mathrm{UA.CB}}, \qquad \frac{\sin \mathrm{CAV}}{\sin \mathrm{VAB}} = \frac{\mathrm{CV.AB}}{\mathrm{VB.CA}}.$$

La transformation comporte donc les formules

$$\frac{\mathrm{CU.AB}}{\mathrm{UA.CB}} = \frac{\mathrm{U'A.CB}}{\mathrm{CU'.AB}}, \qquad \frac{\mathrm{CV.AB}}{\mathrm{VB.CA}} = \frac{\mathrm{V'B.CA}}{\mathrm{CV'.AB}}.$$

Si, par suite, on prend $\lambda = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}$, $\mu = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}$, on voit que les équations de la transformation seront encore

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{1}{y'}.$$

Tous les résultats établis analytiquement, au moyen des coordonnées précédentes, pour l'une des deux transformations considérées, seront donc encore vrais pour l'autre. Il suffira simplement, dans leur interprétation géométrique, de tenir compte de la différence de définition des deux systèmes de coordonnées.

Mais les transformations en question sont trop connues pour que je m'y arrête ici.

4. La même méthode s'appliquera encore s'il s'agit d'une transformation tangentielle dans laquelle les droites se correspondent suivant une relation entre les rapports qu'elles déterminent sur les côtés d'un triangle fondamental. Il suffira seulement de faire usage des coordonnées tangentielles u et v au lieu des coordonnées ponctuelles x et y.

II. — Étude d'une transformation quadratique birationnelle particulière.

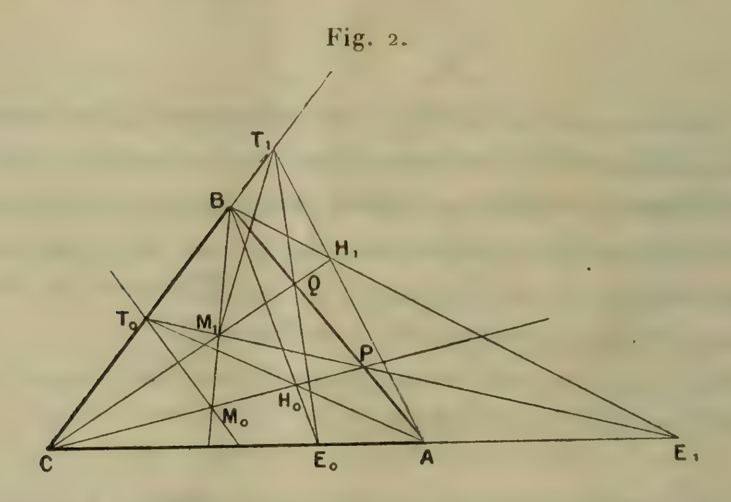
5. Le cas le plus simple est celui des transformations quadratiques birationnelles qui lient deux courbes de telle sorte qu'à un point de l'une d'elles ne correspond qu'un point de l'autre et réciproquement.

Dans ce cas, les équations (1) sont du premier degré, soit qu'on les considère par rapport au système des variables x et y, ou à celui des variables x' et y'.

A titre d'exemple de la méthode dont je viens de parler, je vais aborder l'étude d'une transformation de ce genre.

Cette transformation, qui est réciproque, sera définie de la manière suivante (*fig.* 2) :

Fig. 2.



Soient ABC *le triangle fondamental ;* M_0 *et* M_1 *deux points correspondants. Les points* M_0 *et* M_1 *sont en ligne droite avec le point* B; *en outre, les droites* CM_0 *et* CM_1 *rencontrent le côté* AB *en des points isotomiques (symétriques par rapport au milieu de* AB).

On voit immédiatement que les formules de la trans-

formation sont, en prenant $\lambda = \mu = 1$,

(2) $$x_0 = x_1, \qquad x_0 x_1 = y_0 y_1.$$

Si donc l'équation d'une courbe c_0 donnée est, en désignant par un indice les coordonnées courantes qui s'y rapportent,

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

l'équation de sa transformée c_1 sera

$$f\left(x_1, \frac{x_1^2}{y_1}\right) = 0.$$

6. Voyons tout de suite comment sont liées géométriquement les tangentes en des points correspondants de ces courbes.

La différentiation des équations (2) donne

$$dx_0 = dx_1 \quad \text{et} \quad x_0\, dx_1 + x_1\, dx_0 = y_0\, dy_1 + y_1\, dy_0;$$

d'où

$$x_0 - y_1 \frac{dy_0}{dx_0} = -x_1 + y_0 \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Or les équations (2) donnent

$$\frac{x_0^2}{y_0} = y_1 \quad \text{et} \quad \frac{x_1^2}{y_1} = y_0.$$

On peut donc écrire

$$x_0 - \frac{x_0^2}{y_0} \frac{dy_0}{dx_0} = -x_1 + \frac{x_1^2}{y_1} \frac{dy_1}{dx_1}$$

ou

(3) $$\frac{x_0}{y_0}\left(y_0 - x_0 \frac{dy_0}{dx_0}\right) = -\frac{x_1}{y_1}\left(y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1}\right).$$

Mais, si les droites CM_0 et CM_1 coupent AB respectivement en P et en Q, on a

$$\frac{x_0}{y_0} = -\frac{PB}{PA}, \qquad \frac{x_1}{y_1} = -\frac{QB}{QA}.$$

D'autre part, l'équation de la tangente en M_0 étant

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{dy_0}{dx_0},$$

si l'on appelle T_0 le point où elle coupe CB, on obtient, en faisant $x=0$ dans l'équation précédente,

$$\frac{T_0C}{T_0B}=y_0-x_0\frac{dy_0}{dx_0}.$$

De même

$$\frac{T_1C}{T_1B}=y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1}.$$

L'équation (3) est donc équivalente à

$$\frac{PB}{PA}\,\frac{T_0C}{T_0B}=-\frac{QB}{QA}\,\frac{T_1C}{T_1B}.$$

Les droites CP et AT_0 se coupant en H_0, tirons la droite BH_0 qui rencontre CA en E_0. Nous avons, par le théorème de Ceva,

$$\frac{PB.T_0C.E_0A}{PA.T_0B.E_0C}=-1.$$

De même, si CQ et AT_1 se coupent en H_1 et si BH_1 rencontre CA en E_1,

$$\frac{QB.T_1C.E_1A}{QA.T_1B.E_1C}=-1.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\frac{E_0A}{E_0C}=-\frac{E_1A}{E_1C}.$$

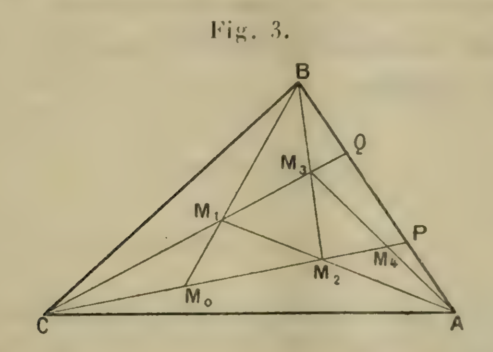
Elle exprime que *les points* E_0 *et* E_1 *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* C *et* A.

On en déduit immédiatement que la droite E_0Q passe par T_1, et la droite E_1P par T_0.

Ainsi se trouve mis en évidence le lien géométrique qui unit les tangentes M_0T_0 et M_1T_1.

7. Si, dans la définition donnée au n° 5, on intervertit le rôle joué par les points A et B, c'est-à-dire si on aligne les points correspondants M_1 et M_2 sur le

Fig. 3.



point A (*fig.* 3), les formules de la transformation sont

$$(4) \qquad x_1 = x_2, \qquad x_1 x_2 = y_1 y_2.$$

Nous allons appliquer alternativement les transformations (2) et (4) en partant d'une droite d_0 passant par le point A, c'est-à-dire ayant pour équation

$$y_0 = k.$$

Si nous appliquons la transformation (2), nous obtenons pour la transformée d_1 de d_0 l'équation

$$x_1^2 = k y_1,$$

qui représente une conique tangente à AC et à AB en C et en B.

La transformation (4) appliquée à d_1 donne pour d_2 l'équation

$$y_2^3 = k x_2^2,$$

qui représente une cubique tangente à AB en A où elle présente une inflexion et à CA en C où elle présente un rebroussement. L'existence de ce rebroussement

montre que cette cubique est *cuspidale* [1], d'après la terminologie de Salmon.

On voit bien aisément qu'en continuant à appliquer ainsi alternativement les transformations (2) et (4) on obtient d'une manière générale pour les courbes d_{2n} et d_{2n+1} les équations

$$y_{2n}^{2n+1} = kx_{2n}^{2n}$$

et

$$x_{2n+1}^{2n+2} = ky_{2n+1}^{2n+1}.$$

Ces courbes sont, au degré près, absolument de même nature lorsqu'on permute x et y, c'est-à-dire les rôles joués par les axes CA et CB. Nous pouvons donc nous borner à l'étude de l'une d'elles, d_{2n} par exemple.

8. Cette courbe d_{2n} est, d'après son mode même de génération, *unicursale* ou de *genre zéro*, puisqu'elle correspond point par point d'une manière univoque à une droite.

Elle est de l'*ordre* $2n+1$ puisque son équation ponctuelle est de degré $2n+1$.

Il suffit donc, pour définir complètement son espèce, de chercher sa *classe,* c'est-à-dire de former son équation tangentielle au moyen des coordonnées u et v définies plus haut.

L'équation de la tangente au point (x, y) de la courbe est

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}.$$

Si donc α et β sont l'X et l'Y des points où cette tan-

---

(1) Nous avons déjà examiné ce mode spécial de génération des cubiques cuspidales dans une Note publiée par les *Nouvelles Annales* (3e série, t. XI, p. 386).

gente rencontre respectivement CA et CB, on a

$$\alpha = x - y\,\frac{dx}{dy},$$

$$\beta = y - x\,\frac{dy}{dx}.$$

Or, l'équation de la courbe étant

$$y^{2n+1} = kx^{2n},$$

on a

$$(2n+1)y^{2n}\,dy = 2nk\,x^{2n-1}\,dx;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2nkx^{2n-1}}{(2n+1)y^{2n}} = \frac{2ny}{(2n+1)x}.$$

Donc

$$\alpha = -\frac{x}{2n},$$

$$\beta = \frac{y}{2n+1}.$$

Mais les coordonnées u et v de la tangente sont données par

$$u = -\frac{1}{\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\beta}.$$

Il vient, par suite,

$$u = \frac{2n}{x}, \qquad v = -\frac{2n+1}{y},$$

et l'équation tangentielle de la courbe obtenue en portant les valeurs de x et y tirées de là dans son équation ponctuelle est

$$(2n+1)^{2n+1}u^{2n} = k(2n)^{2n}(-v)^{2n+1}.$$

Cette équation étant de degré $2n+1$, la courbe est de la *classe* $2n+1$.

Ainsi donc, *la courbe* d_{2n} *est une courbe unicursale dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à* $2n+1$.

Et, puisqu'on passe des indices pairs aux indices impairs par la simple permutation de x et de y, on peut dire d'une manière générale que *la courbe d_n est une courbe unicursale dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à $n+1$.*

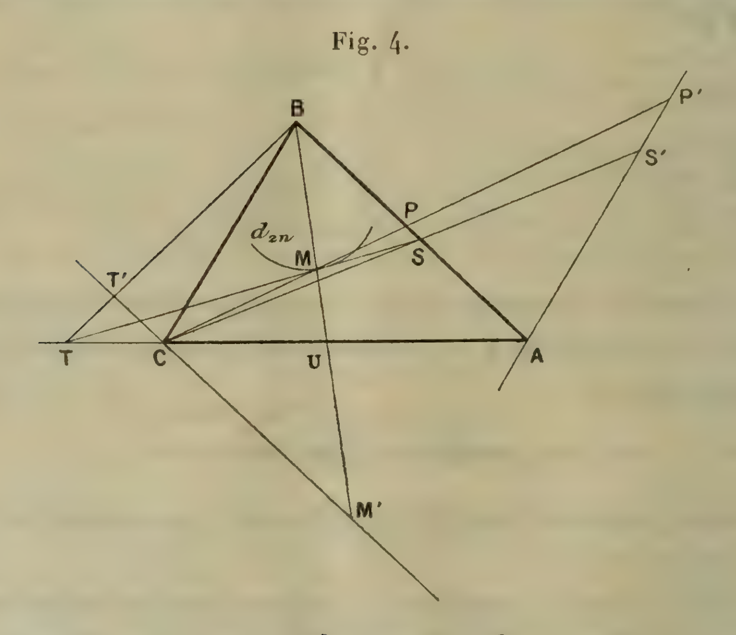
Les formules de Plücker montrent que le nombre des points doubles d'une telle courbe et celui de ses tangentes doubles sont égaux à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, celui des points stationnaires (rebroussements) et celui de ses tangentes stationnaires (inflexions) à $n-1$.

Ces courbes peuvent être considérées comme généralisant les coniques.

Pour $n=3$, on obtient une unicursale d'ordre 3 et de classe 3, c'est-à-dire une cubique cuspidale, ainsi que nous l'avons trouvé précédemment par une autre voie.

9. Les formules ci-dessus établies conduisent à des

Fig. 4.



constructions remarquablement simples pour la tangente en un point choisi sur la courbe d_{2n} (*fig.* 4).

Prenons, par exemple, la formule

$$ux = 2n.$$

Si la droite BM coupe CA en U et si la tangente en M coupe CA en T, cette formule peut s'écrire

$$\frac{\text{UC}}{\text{UA}}\,\frac{\text{TA}}{\text{TC}} = -2n.$$

Par le point C menons à AB la parallèle CM′T′ qui coupe BM en M′ et BT en T′. Le rapport anharmonique étant projectif, nous avons

$$\frac{\text{M}'\text{C}}{\text{T}'\text{C}} = -2n.$$

En d'autres termes, les points M′ et T′ sont situés de part et d'autre du point C et la longueur M′C est égale à $2n$ fois la longueur T′C. De là le moyen de construire la tangente MT si l'on se donne le point M et le point M si l'on se donne la tangente.

Pour une courbe d'ordre impair la construction sera la même en intervertissant les rôles des points A et B.

10. Voici encore un autre mode de liaison géométrique du point et de la tangente de la courbe d_{2n}.

On a

$$\frac{ux}{vy} = -\frac{2n}{2n+1}.$$

Si la droite CM coupe AB en P et que la tangente MT coupe AB en S, cette égalité peut s'écrire (1)

$$\frac{\text{SA}}{\text{SB}}\left(-\frac{\text{PB}}{\text{PA}}\right) = -\frac{2n}{2n+1}$$

(1) J'ai, dans la Note citée, donné cette propriété pour les cubiques cuspidales.

ou

$$\frac{SA.PB}{SB.PA} = \frac{2n}{2n+1}.$$

Par le point A menons à BC la parallèle A P′ S′ qui coupe CP en P′ et CS en S′. Nous avons alors

$$\frac{S'A}{P'A} = \frac{2n}{2n+1}.$$

11. Chaque courbe d_n, lorsqu'on se donne le triangle fondamental ABC, est déterminée par une seule condition puisque son équation contient le paramètre unique k.

Il suffit donc de s'en donner un point ou une tangente. Dans ce second cas, on obtient d'ailleurs le point de contact, par application soit du théorème du n° 9, soit de celui du n° 10, et l'on est ramené au premier.

Soit donc M_n le point donné; on construit son correspondant M_0 par l'application alternée des transformations (2) et (4); on n'a plus ensuite qu'à faire parcourir au point m_0 la droite AM_0 pour que son correspondant m_n engendre la courbe d_n demandée.

On peut notamment ainsi construire une conique tangente aux droites AB et AC en B et en C et passant par un point donné.

12. A titre d'exemple d'application, j'indiquerai une construction très simple et très commode en pratique (car tout le tracé tient à l'intérieur du parallélogramme des données) de l'ellipse dont on donne deux diamètres conjugués, problème qui se rencontre souvent, notamment en perspective et dans l'épure des ponts à intrados elliptique.

Soient OB et OC deux demi-diamètres conjugués donnés. Complétons le parallélogramme BOCA.

L'ellipse cherchée doit être tangente à AB et à AC en B et en C et passer par le symétrique M_1 de C par rapport à O.

Le correspondant M_0 de M_1, en vertu de la transformation (2), coïncide ici avec M_1 puisque CM_1 est parallèle à AB. Nous prendrons donc pour droite AM_0 la droite AM_1, c'est-à-dire la droite joignant le point A au milieu β de OB.

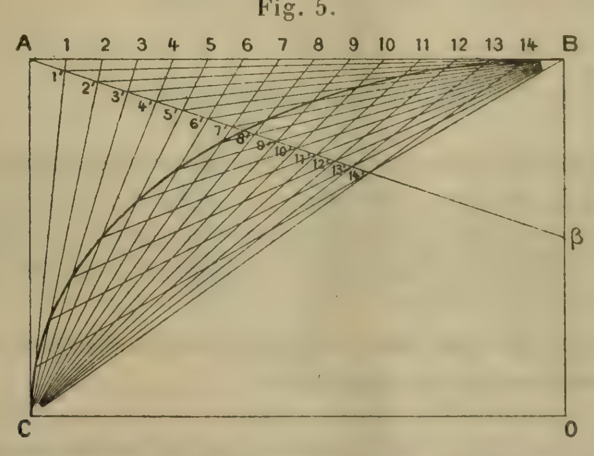
Pour avoir un point quelconque m_1 de l'ellipse cherchée, nous prendrons sur Aβ un point quelconque m_0; nous tirerons Cm_0 qui coupe AB en p_0; et nous porterons de B vers A le segment Bp_1 égal à Ap_0. La rencontre des droites Cp_1 et Bm_0 donnera m_1.

Si l'on veut obtenir la tangente en m_1, le théorème du n° 10 donne la construction suivante (en remarquant que puisqu'il s'agit de d_1, c'est-à-dire d'une courbe à indice impair, on doit intervertir A et B) :

La droite Cp_1 coupant OB en p'_1, prendre le milieu s'_1 de Bp'_1. Si la droite Cs'_1 coupe AB en s_1, $m_1 s_1$ est la tangente cherchée.

Une manière très commode d'appliquer la construc-

Fig. 5.



tion par points de l'ellipse, donnée ci-dessus, est la suivante (*fig.* 5).

Diviser AB *en* $n+1$ *parties égales par des points numérotés* 1, 2, ..., n. *Tirer les droites* C1, C2, ..., Cn *qui donnent sur* Aβ, β *étant le milieu de* OB, *les points* 1′, 2′, ..., n'. *Enfin, tirer les droites* B1′ B2′, ..., Bn'. *On obtient des points de l'ellipse cherchée par la rencontre des couples de droites qui suivent*

$$\begin{array}{rcl} C1 & \text{et} & Bn', \\ C2 & \text{et} & B(n-1)', \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ C(n-1) & \text{et} & B2', \\ Cn & \text{et} & B1'. \end{array}$$

Cette construction est d'autant plus à recommander dans la pratique que les points de l'ellipse ainsi obtenus sont assez régulièrement espacés sur la courbe, comme on peut en juger sur la *fig.* 5, où l'on a fait $n=14$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893 (DEUXIÈME SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires ox et oy et l'ensemble de deux droites $\lambda(y-b)^2+(x-a)^2=0$.

1° Former l'équation générale des coniques Δ qui admettent ces deux droites pour diamètres conjugués et qui de plus sont tangentes à l'axe des x.

Démontrer que par un point quelconque du plan on peut faire passer deux de ces coniques.

2° On considère les deux coniques Δ qui passent par un point $(0, q)$ de l'axe des y, et on demande le lieu du point de concours des cordes de contact des tangentes menées de l'origine à ces deux coniques, quand on fait varier q. Ce lieu est

une parabole P qui, si l'on fait varier λ, a deux points fixes et un diamètre fixe.

3° Laissant λ fixe, on fait mouvoir le point (a, b) sur la parabole qui a pour équation $a = pb^2$, et l'on demande le lieu du point de rencontre de la parabole P avec celui de ses diamètres qui est conjugué à la direction ayant $\frac{a}{\lambda b}$ pour coefficient angulaire.

Calcul trigonométrique.

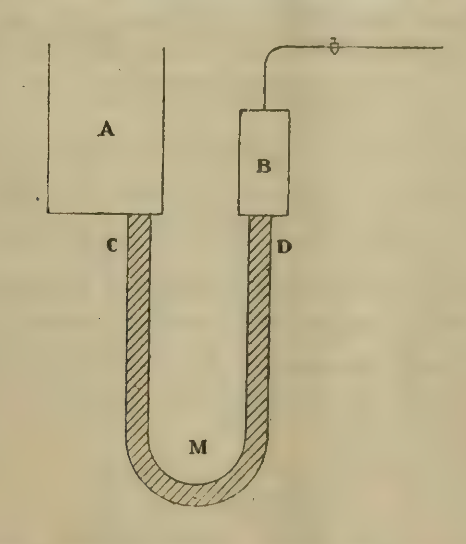
Résoudre un triangle connaissant deux côtés a, b, et le rayon du cercle circonscrit R.

On donne

$$a = 4737{,}523,$$
$$b = 3427{,}645,$$
$$R = 6743{,}823.$$

Physique.

Un vase A ouvert, d'une section égale à 10^{dmq} et d'une hauteur de 10^m, est réuni par un tube CMD plein de mercure, d'une



section de 1^{dmq} et d'une hauteur illimitée, avec un vase B clos, d'une section égale à 3^{dmq} et d'une hauteur de 10^m.

Ce vase B peut être mis en relation avec une machine pneu-

matique pour laquelle le rapport $\frac{u}{v}$ du volume de l'espace nuisible au volume du récipient est égal à $\frac{1}{40}$.

On fait dans le vase B un vide aussi complet que le permet la machine pneumatique et en même temps on verse assez d'eau dans le vase A pour le remplir complètement.

La pression atmosphérique étant $0^{m},760$ au moment de l'expérience, on demande la hauteur de la colonne de mercure qui entrera dans le vase B.

La densité du mercure est 13,69.

Chimie.

1° Analogies de l'oxygène et du soufre.

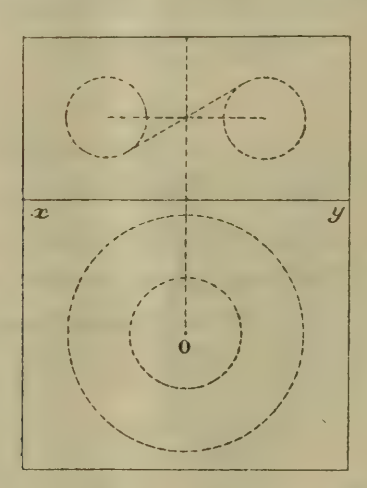
2° Composition de l'acide sulfhydrique.

Épure.

Intersection d'un tore et d'un cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 180^{mm} du petit côté supérieur.

L'axe du tore est vertical et se projette en O, à égale distance



des grands côtés du cadre et à 145^{mm} en avant de la ligne de terre.

Le centre du tore est à 50^{mm} au-dessus du plan horizontal.

Le centre du cercle générateur du tore est à 85mm de l'axe et le rayon de ce cercle est de 45mm.

Le sommet du cône est sur l'axe du tore à 135mm au-dessus du plan horizontal.

La directrice du cône est la section faite dans le tore par un plan bitangent perpendiculaire au plan vertical et incliné dans le sens qu'indique la figure.

On demande de représenter par ses deux projections le tore supposé plein, en supprimant la portion de ce corps comprise à l'intérieur du cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Tore troué par un cône.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.
Le cadre a 0m,45 sur 0m,27.

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

Dans le Cahier du mois d'août, j'ai fait connaître, sous forme explicite, la résultante d'un nombre quelconque d'équations algébriques ; la démonstration que j'ai donnée peut être sujette à quelques objections : je vais la présenter sous une forme nouvelle et tout à fait rigoureuse. (Je signalerai une faute d'impression qui peut arrêter les lecteurs : au lieu de poser $x_{ij} = a_{ij} t_j$, il faut lire $x_{ij} = \alpha_i t_j$.)

Soient

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2}, \\ \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \ldots, & x_{n\mu} \end{matrix}$$

les solutions distinctes en nombre $\mu = m^n$ de n équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0.$$

Soient

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{21}, & \ldots, & y_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_{1\mu}, & y_{2\mu}, & \ldots, & y_{n\mu} \end{matrix}$$

les solutions supposées distinctes de n autres équations algébriques de degré m, en $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \ldots, \quad g_n = 0.$$

Soient enfin

$$(1) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_{n+1} = 0$$

$n+1$ équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut poser

$$\varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}) + (x_1 - x_{1j})\varphi_{i1}^j + \ldots + (x_1 - x_{nj})\varphi_{in}^j,$$

φ_{ik}^j désignant un polynôme entier de degré $m-1$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ qui ne change pas quand on permute x_1 et x_{1j}, x_2 et x_{2j}, ... Posons

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \ldots) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^j & \cdots & \varphi_{1n}^j \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^j & \cdots & \varphi_{2n}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^j & \cdots & \varphi_{n+1,n}^j \end{vmatrix};$$

il est facile de voir que le déterminant qui entre dans cette formule ne change pas quand on y remplace la première colonne, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ par $\varphi_1(x_{1j}, x_{2j}, \ldots)$, $\varphi_2(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) \ldots$; il suffit pour cela de retrancher de la première colonne la deuxième multipliée par $x_1 - x_{1j}$, la troisième multipliée par $x_2 - x_{2j}$, ... Donc, si l'on

pose

$$\theta_{ij} = \theta(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, x_{1j}, x_{2j}, \ldots),$$

on aura

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}.$$

Maintenant considérons le déterminant

$$(2) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{p1} & \theta_{p2} & \ldots & \theta_{pn} \end{vmatrix};$$

on peut évidemment lui donner la forme

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \theta_{11} & \Delta_1\theta_{11} & \Delta_2\theta_{11} & \ldots & \Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\ldots\Delta_n^{m-1}\theta_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{\mu 1} & \Delta_1\theta_{\mu 1} & \Delta_2\theta_{\mu 1} & \ldots & \Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\ldots\Delta_n^{m-1}\theta_{\mu 1} \end{vmatrix},$$

Δ_1 désignant un signe de différentiation finie relatif à la variable x, Δ_2 un signe de différentiation finie relatif à la variable x_2, ... Les éléments d'une même ligne dans le déterminant sont les μ termes du produit symbolique

$$(1 + \Delta_1 + \Delta_1^2 + \ldots + \Delta_1^{m-1}) \\ \times (1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_2^{m-1}) \ldots (1 + \Delta_n + \ldots + \Delta_n^{m-1})\,\theta_{k1}.$$

$\Delta_1^\alpha \Delta_2^\beta \ldots \theta_{ki}$ est évidemment de degré

$$n(m-1) - \alpha - \beta \ldots$$

par rapport aux x_{ij} ou aux y_{ij}. Soient maintenant ω_1, ω_2, ..., ω_μ les μ termes du produit

$$(1 + y_1 + y_1^2 + \ldots + y_1^{m-1}) \\ \times (1 + y_2 + \ldots + y_2^{m-1}) \ldots (1 + y_n + \ldots + y_n^{m-1})$$

et ω_{ij} la valeur de ω_i pour $y_1 = y_{1j}$, $y_2 = y_{2j}$, ... Soit

$$D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

$$D_i = D(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni});$$

multiplions le déterminant (3) par le suivant

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \frac{\omega_{11}}{D_1} & \frac{\omega_{12}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{1\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\omega_{21}}{D_1} & \frac{\omega_{22}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{2\mu}}{D_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_{\mu 1}}{D_1} & \frac{\omega_{\mu 2}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{\mu\mu}}{D_\mu} \end{vmatrix} = \frac{\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \frac{\Sigma \pm \omega_{11} \dots \omega_{\mu\mu}}{D_1 D_2 \dots D_\mu},$$

nous aurons

$$\frac{\Theta\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\dots\theta_{i1}\omega_{1i}}{D_i} \\ \sum \frac{\theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1}\Delta_2^{m-1}\dots\theta_{i1}\omega_{2i}}{D_i} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \end{vmatrix}.$$

En vertu d'un théorème connu de Jacobi, les éléments de ce déterminant situés à gauche de la diagonale qui descend de gauche à droite sont nuls, les éléments de la diagonale ne dépendent que des termes du degré le plus élevé dans les g; donc

$$\frac{\Theta\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu}$$

ne dépend que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les g. De même, si l'on désigne par Ω' ce que devient Ω quand on y remplace les y_{ij} par les x_{ij}, par D'_1, D'_2, ... ce que deviennent D_1, D_2, ... dans la même hypothèse, on voit que

$$\frac{\Theta\Omega\Omega'}{\Pi D_i \Pi D'_i}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f et les g; si l'on suppose les g égaux aux f, on voit que

$$\frac{\Theta\Omega^2}{(\Pi D_i)^2}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f, et, comme il en est ainsi de $\frac{\Omega^2}{\Pi D_i}$, $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ ne dépendra non plus que des termes du degré le plus élevé des f. Faisons varier ces termes sans faire varier les x_{ij}, cela revient à remplacer les f par des fonctions linéaires à coefficients constants des f. Dans ces conditions, D est multiplié par un facteur constant ΠD_i aussi; donc quand on suppose que les x_{ij} varient, $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ reste déterminé à un facteur près indépendant de ces x_{ij}. On pourra donc déterminer $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ en supposant $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$, ..., $f_n = \varphi_n$; alors θ_{ij} se réduit au signe près à

$$\varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \ldots) \begin{vmatrix} \varphi_{11}^j & \varphi_{12}^j & \cdots & \varphi_{1n}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}^j & \varphi_{n2}^j & \cdots & \varphi_{nn}^j \end{vmatrix}$$

pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...

On voit que θ_{ij} est nul si $i \gtrless j$ et qu'il est égal à 1

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})} \qquad \text{si } i = j.$$

On a donc

$$\frac{\Theta}{\Pi D_i} = \Pi \varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \ldots),$$

à un facteur près indépendant de la forme de la fonction φ_{n+1}; $\Theta = 0$ (où l'on suppose $x_{ij} = y_{ij}$) est donc bien la résultante des équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n+1} = 0,$$

et Θ est un déterminant symétrique.

Je souhaite de tout mon cœur qu'un géomètre plus habile que moi simplifie cette démonstration.

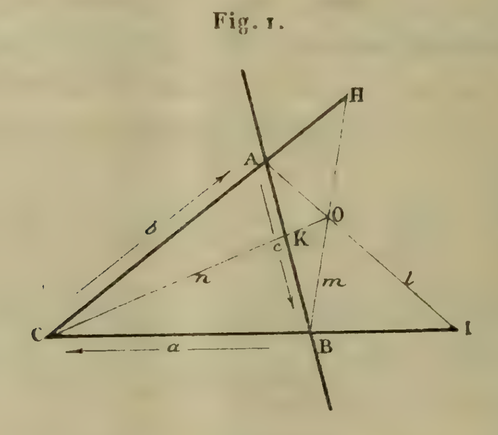
SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TRIANGULAIRES;

PAR M. P. SONDAT.

1. On trouve dans la *Géométrie supérieure* de Chasles (IIIe Section, Chap. XXIII et XXIV) l'aperçu d'un système de coordonnées triangulaires. Je me propose, dans cette Note, de développer ce système et de montrer par quelques applications l'utilité qu'on peut en tirer en Géométrie pure.

2. *Coordonnées du point.* — Soit (*fig.* 1) ABC un triangle de référence. Nous désignerons par a, b, c les

Fig. 1.



longueurs de ses côtés, comptés dans le même sens de rotation, par exemple, dans le sens alphabétique, savoir de B vers C, de C vers A et de A vers B, et par S sa surface.

Imaginons un point O à ses sommets par les droites OA, OB, OC dont nous désignerons les directions par

l, m, n, et coupant les côtés en I, H, K. Si nous posons

$$\frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IC}} = \alpha, \qquad \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{HA}} = \beta, \qquad \frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{KB}} = \gamma,$$

les quantités α, β, γ, liées par l'égalité

$$(1) \qquad \alpha\beta\gamma = -1,$$

sont trois nombres abstraits qui fixent la position du point O. Nous les appellerons les coordonnées *segmentaires* de ce point.

Il est évident qu'un point de BC est déterminé par sa seule coordonnée α et que le centre de gravité est le point $(-1, -1, -1)$.

En posant

$$\frac{\sin(lb)}{\sin(lc)} = \alpha', \qquad \frac{\sin(mc)}{\sin(ma)} = \beta', \qquad \frac{\sin(na)}{\sin(nb)} = \gamma',$$

les côtés a, b, c étant comptés comme on l'a dit, les nombres α', β', γ' fixent aussi le point O et en sont les coordonnées *angulaires*.

Les coordonnées angulaires sont d'ailleurs reliées, en valeurs et en signes, aux coordonnées segmentaires par les relations

$$(2) \qquad \alpha\alpha' = -\frac{c}{b}, \qquad \beta\beta' = -\frac{a}{c}, \qquad \gamma\gamma' = -\frac{b}{a};$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha'\beta'\gamma' = +1.$$

On sait que les coordonnées *normales* du point O sont ses distances x, y, z aux côtés a, b, c, distances qu'on peut regarder comme positives quand le point O est dans l'intérieur du triangle ABC.

Elles satisfont à l'égalité

$$(4) \qquad ax + by + cz = \mathrm{S}$$

et sont reliées, en valeurs et en signes, aux coordonnées angulaires par

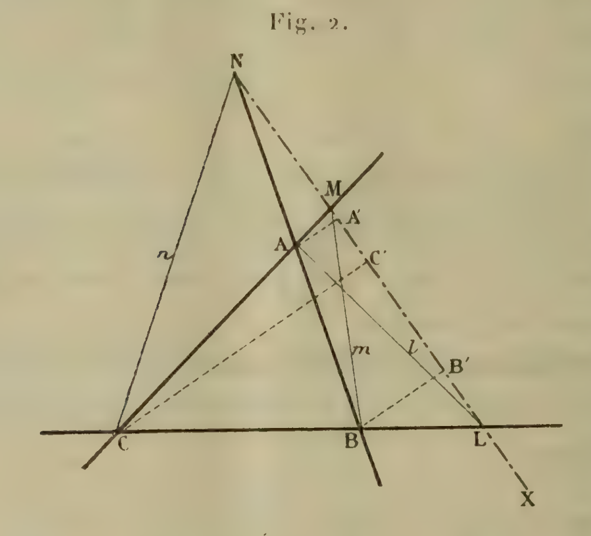
$$(5) \qquad \alpha' = \frac{y}{z}, \qquad \beta' = \frac{z}{x}, \qquad \gamma' = \frac{x}{y}$$

et aux coordonnées segmentaires par

$$(6) \qquad \alpha = -\frac{c}{b}\frac{z}{y}, \qquad \beta = -\frac{a}{c}\frac{x}{z}, \qquad \gamma = -\frac{b}{a}\frac{y}{x}.$$

3. *Coordonnées de la droite.* — Soit (*fig.* 2) X une

Fig. 2.



droite coupant les côtés a, b, c en L, M, N. Appelons l, m, n les directions AL, BM, CN et posons

$$\frac{LB}{LC} = \lambda, \qquad \frac{MC}{MA} = \mu, \qquad \frac{NA}{NB} = \nu,$$

$$\frac{\sin(lb)}{\sin(lc)} = \lambda', \qquad \frac{\sin(mc)}{\sin(ma)} = \mu', \qquad \frac{\sin(na)}{\sin(nb)} = \nu'.$$

Les nombres λ, μ, ν sont les coordonnées *segmentaires* de X et les nombres λ', μ' ν' en sont les coordonnées *angulaires*.

On a d'ailleurs

$$(7) \qquad \lambda\mu\nu = +1;$$

$$(8) \qquad \lambda\lambda' = -\frac{c}{b}, \qquad \mu\mu' = -\frac{a}{c}, \qquad \nu\nu' = -\frac{b}{a};$$

$$(9) \qquad \lambda'\mu'\nu' = -1.$$

Soient x', y', z' les distances AA', BB', CC' des sommets A, B, C à la droite X, distances que nous regardons comme positives quand la droite X laisse les trois sommets du même côté.

Ces longueurs seront les coordonnées *normales* de X.

Elles sont reliées aux coordonnées segmentaires par

$$(10) \qquad \lambda = \frac{y'}{z'}, \qquad \mu = \frac{z'}{x'}, \qquad \nu = \frac{x'}{y'},$$

et aux coordonnées angulaires par

$$(11) \qquad \lambda' = -\frac{c}{b}\frac{z'}{y'}, \qquad \mu' = -\frac{a}{c}\frac{x'}{z'}, \qquad \nu' = -\frac{b}{a}\frac{y'}{x'}.$$

Elles vérifient d'ailleurs l'égalité

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0$$

ou

$$(12) \quad \begin{cases} 4S^2 = a^2(x'-y')(x'-z') \\ \qquad + b^2(y'-x')(y'-z') + c^2(z'-x')(z'-y'). \end{cases}$$

Remarquons que toute droite menée par A est déterminée par sa seule coordonnée λ et que la droite $(1, 1, 1)$ est celle à l'infini dans le plan.

4. Théorème. — *Si un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *appartient à la droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *on a*

$$(13) \qquad \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{\beta} + \frac{\gamma}{\nu} = 1, \qquad \frac{\nu}{\gamma} + \frac{\alpha}{\lambda} = 1.$$

On a, en effet (*fig.* 3),

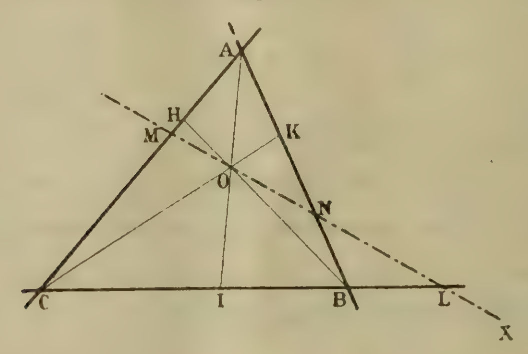
$$(A : LIBC) = (A : LONM),$$
$$(B : HMCA) = (B : OMLN),$$

et, en ajoutant,

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = (LONM) + (OMLN)$$
$$= (OLMN) + (OMLN)$$
$$= 1.$$

Les deux autres relations se déduisent aisément de celle-ci, en tenant compte des égalités (1) et (7).

Fig. 3.



Les équations (13) deviennent, en coordonnées angulaires,

$$(14) \qquad \frac{\alpha'}{\lambda'} + \frac{\mu'}{\beta'} = 1, \qquad \frac{\beta'}{\mu'} + \frac{\nu'}{\gamma'} = 1, \qquad \frac{\gamma'}{\nu'} + \frac{\lambda'}{\alpha'} = 1,$$

et se réduisent, en coordonnées normales, à la seule

$$(15) \qquad axx' + byy' + czz' = 0.$$

5. *Équations de la droite.* — Si un point O se déplace sur une droite *fixe* X, ses coordonnées variables satisferont, suivant le choix des coordonnées, aux équations (13), (14) ou (15). On peut donc regarder ces équations comme étant celles de la droite X.

La droite (1, 1, 1) à l'infini est représentée dans les trois systèmes par

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}+\beta=1,\\ &b\alpha'+\frac{a}{\beta'}+c=0,\\ &ax+by+cz=0. \end{aligned}\right.$$

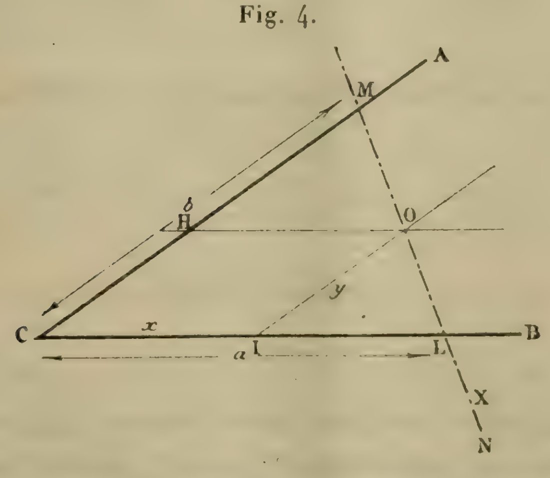
6. *Équations du point.* — Si une droite X tourne autour d'un point *fixe* O, ses coordonnées variables satisferont aussi aux mêmes équations (13), (14) ou (15), qui sont alors celles du point O.

Le centre de gravité a pour équations, dans les trois systèmes,

$$\lambda+\frac{1}{\mu}+1=0,\qquad \frac{1}{b\lambda'}+\frac{\mu'}{a}=\frac{1}{c},\qquad x'+y'+z'=0.$$

7. Les coordonnées *cartésiennes* ne sont qu'un cas particulier des coordonnées segmentaires; car, si le côté AB passe à l'infini (*fig.* 4), la première des équa-

Fig. 4.



tions (13), après suppression des longueurs devenues infinies, se réduit à

$$\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{LC}}+\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{MC}}=1$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

équation dans laquelle x et y sont les coordonnées cartésiennes du point O, rapporté aux côtés de l'angle C, a et b les longueurs LC et MC.

Nous emploierons, dans ce qui suit, les coordonnées segmentaires, et il sera d'ailleurs facile de transformer les résultats obtenus.

8. *Coordonnées du point de rencontre de deux droites.* — Soient les deux droites

$$X(\lambda\mu\nu) \quad \text{et} \quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$$

se coupant au point $O(\alpha\beta\gamma)$.

On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1,$$

avec

$$\lambda\mu\nu = 1, \qquad \lambda_1\mu_1\nu_1 = 1, \qquad \alpha\beta\gamma = -1.$$

D'où l'on tire

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \\ \beta = \dfrac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda\lambda_1(\nu - \nu_1)}, \\ \gamma = \dfrac{\mu_1 - \mu}{\mu\mu_1(\lambda - \lambda_1)}. \end{cases}$$

9. *Point à l'infini sur une droite.* — Soit $Q(\alpha\beta\gamma)$ le point à l'infini sur une droite donnée $X(\lambda\mu\nu)$.

On aura ses coordonnées par les formules (17) en supposant $X_1(111)$ à l'infini. On trouve ainsi

$$(18) \quad \alpha = \frac{1-\nu}{\nu(\mu-1)}, \qquad \beta = \frac{1-\lambda}{\lambda(\nu-1)}, \qquad \gamma = \frac{1-\mu}{\mu(\lambda-1)}.$$

10. *Coordonnées de la droite passant par deux points.* — Soient les deux points

$$O(\alpha\beta\gamma), \quad O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$$

et $X(\lambda\mu\nu)$ leur droite.

On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}=1, \qquad \frac{\lambda}{\alpha_1}+\frac{\beta_1}{\mu}=1,$$

avec

$$\lambda\mu\nu=1, \qquad \alpha\beta\gamma=-1, \qquad \alpha_1\beta_1\gamma_1=-1.$$

D'où l'on tire

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta-\beta_1}{\beta\beta_1(\gamma-\gamma_1)}, \\ \mu &= \frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma\gamma_1(\alpha-\alpha_1)}, \\ \nu &= \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\alpha_1(\beta-\beta_1)}. \end{aligned} \right.$$

Si l'un des points, soit O_1, est le centre de gravité, on remplacera α_1, β_1, γ_1 par -1.

11. *Condition pour que trois points soient en ligne droite.* — Soient les trois points

$$O(\alpha\beta\gamma), \quad O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \quad O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2).$$

Pour qu'ils soient en ligne droite, il faut et il suffit que leurs équations soient compatibles, ou que l'on ait

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \beta & 1 \\ \frac{1}{\alpha_1} & \beta_1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha_2} & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12. *Condition pour que trois droites soient concourantes.* — Soient les trois droites

$$X(\lambda\mu\nu), \quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1), \quad X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2).$$

Pour qu'elles soient concourantes il faut et il suffit que leurs équations soient compatibles, ou que l'on ait

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{\mu_1} & 1 \\ \lambda_2 & \frac{1}{\mu_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. *Condition pour que deux droites soient parallèles.* — Soient les deux droites

$$X(\lambda\mu\nu), \quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1).$$

Elles seront parallèles si elles sont concourantes avec la droite (1 1 1) à l'infini, ce qui exige que

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{\mu_1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remarquer que, si deux droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ sont parallèles, la droite qui joint les points

$$O\left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{\nu}\right), \qquad O_1\left(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\mu_1}, -\frac{1}{\nu_1}\right)$$

passe par le centre de gravité.

14. Pour abréger, nous admettrons que la même lettre λ, qui représente le rapport des segments en lesquels un point L divise BC, représente ce point lui-même. Ainsi la droite $X(\lambda\mu\nu)$ est celle qui coupe les côtés de ABC en λ, μ, ν ; le point $O(\alpha\beta\gamma)$ sera celui dont les rayons OA, OB, OC coupent les mêmes côtés

en α, β, γ. De cette manière les lettres L, M, N disparaîtront, ainsi que les lettres I, H, K.

15. Si les droites $\mu\nu$, $\mu_1\nu_1$ se coupent en O et les droites $\mu\nu_1$, $\mu_1\nu$ en O_1, AO et AO_1 divisent l'angle BAC harmoniquement.

Soient α et α_1 les points de rencontre des droites AO, AO_1 avec BC.

On a (8)

$$\alpha = \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \qquad \alpha_1 = \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)};$$

d'où

$$\alpha + \alpha_1 = 0,$$

où le faisceau $(A : BC\alpha\alpha_1)$ est harmonique.

16. Les droites qui joignent les points

$$O(\beta\gamma) \quad \text{et} \quad O_1(\beta_1\gamma_1), \quad \omega(\beta\gamma_1) \quad \text{et} \quad \omega_1(\beta_1\gamma).$$

divisent BC harmoniquement.

Soient λ et λ_1 les points de rencontre des droites OO_1 et $\omega\omega_1$ avec BC.

On a (10)

$$\lambda = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma - \gamma_1)}, \qquad \lambda_1 = \frac{\beta - \beta_1}{\beta\beta_1(\gamma_1 - \gamma)};$$

d'où

$$\lambda + \lambda_1 = 0,$$

ou λ et λ_1 divisent BC harmoniquement.

17. Soient deux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ inscrits dans ABC.

Posons

$$P = \alpha\beta\gamma\,\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

et désignons par

L, M, N les points

$$(\beta\gamma, \beta_1\gamma), \quad (\alpha\gamma, \alpha_1\gamma_1), \quad (\alpha\beta, \alpha_1\beta_1),$$

L_1, M_1, N_1 les points

$$(\beta\gamma_1, \beta_1\gamma), \quad (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma), \quad (\alpha\beta_1, \alpha_1\beta);$$

λ, μ, ν les coordonnées des droites

$$AL, \quad BM, \quad CN,$$

λ_1, μ_1, ν_1 les coordonnées des droites

$$AL_1, \quad BM_1, \quad CN_1.$$

On aura (8)

$$\lambda = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma\gamma_1(\beta - \beta_1)}, \qquad \mu = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha\alpha_1(\gamma - \gamma_1)}, \qquad \nu = \frac{\beta_1 - \beta}{\beta\beta_1(\alpha - \alpha_1)};$$

avec (15)

$$\lambda + \lambda_1 = 0, \qquad \mu + \mu_1 = 0, \qquad \nu + \nu_1 = 0.$$

En multipliant membre à membre les trois premières égalités, on a

$$P \times \lambda\mu\nu = -1,$$

et en tenant compte des trois autres

$$P \times \lambda_1\mu_1\nu_1 = +1.$$

Si $P = +1$, ou si l'hexagone $\alpha\alpha_1\beta\beta_1\gamma\gamma_1$ est de Pascal, les points λ, μ, ν forment une division centrale, et les points conjugués λ_1, μ_1, ν_1 une division rectiligne.

Le contraire a lieu avec $P = -1$.

18. Si $P = -1$, les trois points

$$O\left(\frac{1}{\beta\gamma_1}, \frac{1}{\alpha_1\gamma}, \frac{1}{\alpha\beta_1}\right),$$

$$O_1\left(\frac{1}{\beta_1\gamma}, \frac{1}{\alpha\gamma_1}, \frac{1}{\alpha_1\beta}\right),$$

$$O_2(\lambda_1\mu_1\nu_1)$$

sont en ligne droite, car la condition (20), qui devient ici

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha - \alpha_1 & \beta - \beta_1 & \gamma - \gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

est évidemment remplie.

19. On coupe le triangle ABC par une sécante $X(\lambda\mu\nu)$, sur laquelle on marque un point $P(\alpha\beta\gamma)$. Si l'on prend les conjugués harmoniques I, H, K de P sur les segments $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, et si $A_1 B_1 C_1$ est le triangle des droites AI, BH, CK, les droites AA_1, BB_1, CC_1 seront concourantes en P.

On a, en effet,

$$A_1(\alpha, -\beta, -\gamma),$$
$$B_1(-\alpha, \beta, -\gamma),$$
$$C_1(-\alpha, -\beta, \gamma)$$

et par suite les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes au point $P(\alpha\beta\gamma)$.

Si le point P est à l'infini sur X, les points I, H, K seront les milieux des segments $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, et les droites AA_1, BB_1, CC_1 deviendront parallèles à X.

20. Mener par un point $O(\alpha\beta\gamma)$ une parallèle à une droite $X(\lambda\mu\nu)$.

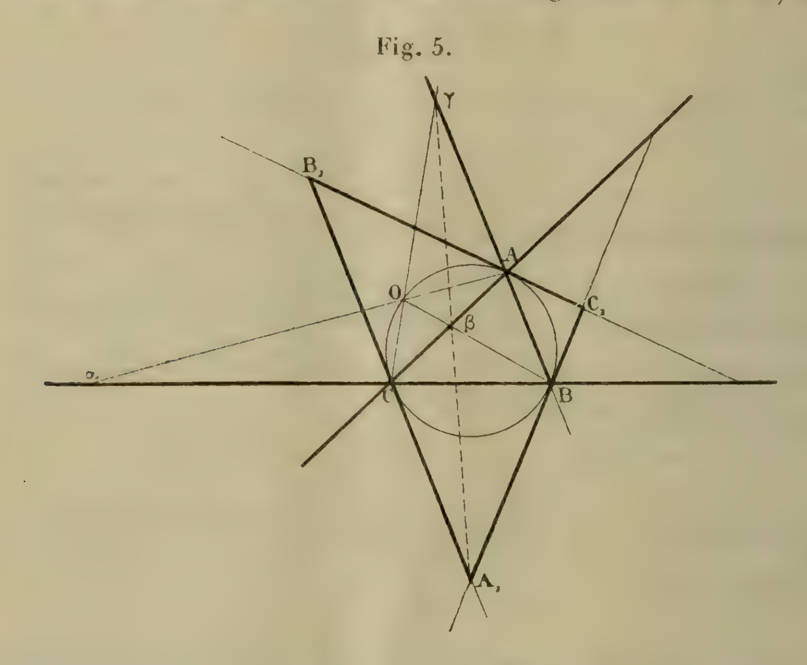
Soit $X_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ cette parallèle. On aura ses coordonnées par les équations

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = +1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{\mu} & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{\mu_1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

21. *Équations du cercle circonscrit au triangle de référence.* — Soit $O(\alpha\beta\gamma)$ un point de la circonférence ABC (*fig.* 5).

Si $A_1 B_1 C_1$ est le triangle des tangentes en A, B, C,

Fig. 5.



les trois points A_1, β, γ, appartenant à la polaire de α par rapport au cercle, sont en ligne droite.

Or les coordonnées de A_1 sont

$$-\frac{c^2}{b^2},\quad \frac{a^2}{c^2},\quad \frac{b^2}{a^2},$$

et celles de $\beta\gamma$,

$$-\alpha,\quad \beta,\quad \gamma.$$

On aura donc les équations du cercle circonscrit en écrivant (4) que A_1 appartient à $\beta\gamma$, ce qui donne

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2 &= c^2\beta + \frac{b^2}{\gamma}, \\ b^2 &= a^2\gamma + \frac{c^2}{\alpha}, \\ c^2 &= b^2\alpha + \frac{a^2}{\beta}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations deviennent, en coordonnées angulaires,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &a+\frac{c}{\beta_1}+b\gamma_1=0,\\ &b+\frac{a}{\gamma_1}+c\alpha_1=0,\\ &c+\frac{b}{\alpha_1}+a\beta_1=0,\end{aligned}\right.$$

et se réduisent, en coordonnées normales, à la seule

$$(25)\qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$$

Chacune des équations (24) revient à la suivante

$$a\sin\widehat{OBA}+b\sin\widehat{OCB}+c\sin\widehat{OBC}=0,$$

qui exprime une propriété connue du quadrangle cyclique OABC.

22. Condition pour que deux droites issues de A soient perpendiculaires.

Menons par le sommet A deux droites $A\alpha$ et $A\alpha_1$ coupant le cercle circonscrit aux points P et P_1.

On aura (23) pour les coordonnées de ces points

$$\begin{aligned} &P,\quad \alpha,\quad \frac{a^2}{c^2-b^2\alpha},\quad \frac{b^2\alpha-c^2}{a^2\alpha},\\ &P_1,\quad \alpha_1,\quad \frac{a^2}{c^2-b^2\alpha_1},\quad \frac{b^2\alpha_1-c^2}{a^2\alpha_1}.\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre ω de ce cercle sont d'ailleurs

$$\omega,\quad \frac{-c\cos C}{b\cos B},\quad \frac{-a\cos A}{c\cos C},\quad \frac{-b\cos B}{a\cos A}.$$

Pour que les droites $A\alpha$ et $A\alpha_1$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que les trois points P, P_1 et ω

soient en ligne droite, ou (11) que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-c\cos C}{a\cos A} & \dfrac{-b\cos B}{a\cos A} \\ 1 & \dfrac{c^2-b^2\alpha}{a^2} & \dfrac{b^2\alpha-c^2}{a^2\alpha} \\ 1 & \dfrac{c^2-b^2\alpha_1}{a^2} & \dfrac{b^2\alpha_1-c^2}{a^2\alpha_1} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on trouve

$$-(\alpha+\alpha_1)a^2+(\alpha+\alpha_1-2\alpha\alpha_1)b^2+(\alpha+\alpha_1-2)c^2=0,$$

ou

$$(26)\qquad (\alpha+\alpha_1)bc\cos A-\alpha\alpha_1 b^2-c^2=0,$$

pour la condition de perpendicularité.

23. Conditions pour que deux droites quelconques soient perpendiculaires.

Soient les droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$. Menons $A\alpha$ et $A\alpha_1$ parallèles à X et X_1.

Si ces dernières sont perpendiculaires, la relation (26) aura lieu, et comme (9),

$$\alpha=\frac{1-\nu}{\nu(\mu-1)},\qquad \alpha_1=\frac{1-\nu_1}{\nu_1(\mu_1-1)},$$

on aura, en remplaçant et transformant,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\mu\mu_1}(\mu c\cos B+\lambda\mu b\cos C-a)\\ &\quad+b\lambda\lambda_1(\nu a\cos C+\mu\nu c\cos A-b)\\ &\qquad+c(\lambda b\cos A+\lambda\nu a\cos B-c)=0,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-\lambda)(1-\lambda_1)\cot A\\ &\quad+\frac{1}{\mu\mu_1}(1-\mu)(1-\mu_1)\cot B\\ &\qquad+\lambda\lambda_1(1-\nu)(1-\nu_1)\cot C=0.\end{aligned}\right.$$

Cette condition se réduit à une identité si l'une des droites est à l'infini.

24. Condition pour qu'une droite $X(\lambda\mu\nu)$ soit perpendiculaire à l'un des côtés de ABC.

Supposons que la droite X_1 se confonde avec BC. On aura

$$\mu_1 = 0,$$

et, d'après (27),

$$c \cos B + \lambda b \cos C = \frac{a}{\mu}.$$

De même une perpendiculaire à AC doit satisfaire à la condition

$$a \cos C + \mu c \cos A = \frac{b}{\nu},$$

et une perpendiculaire à AB, à la suivante

$$b \cos A + \nu a \cos B = \frac{c}{\lambda}.$$

Si une droite satisfaisait à deux de ces conditions, on aurait

$$\lambda = \mu = \nu = 1$$

ou l'un des angles A, B, C serait nul.

25. Mener par un point $O(\alpha\beta\gamma)$ une perpendiculaire à BC.

Soit $X(\lambda\mu\nu)$ cette perpendiculaire. On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \qquad c \cos B + \lambda b \cos C = \frac{a}{\mu};$$

d'où

$$\lambda = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - c \cos B}{b \cos C - \gamma a}.$$

On trouverait de même, pour une perpendiculaire

abaissée de O sur AC,

$$\mu = \frac{\frac{b}{\gamma} - a\cos C}{c\cos A - \alpha b},$$

et pour une perpendiculaire à AB,

$$\nu = \frac{\frac{c}{\alpha} - b\cos A}{a\cos B - \beta c}.$$

26. Supposons les points λ, μ, ν en ligne droite. On aura

$$\lambda\mu\nu = +1,$$

ou, en remplaçant,

$$\begin{aligned}
&2abc(1 + \cos A\cos B\cos C)\\
&\quad - \frac{a}{\alpha}(\alpha^2 b^2 + c^2)(\cos A + \cos B\cos C)\\
&\quad - \frac{b}{\beta}(\beta^2 c^2 + a^2)(\cos B + \cos A\cos C)\\
&\quad - \frac{c}{\gamma}(\gamma^2 a^2 + b^2)(\cos C + \cos A\cos B) = 0,
\end{aligned}$$

ou, en vertu des relations

$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C = \frac{bc}{4R^2},$$

$$\cos B + \cos A\cos C = \sin A\sin C = \frac{ac}{4R^2},$$

$$\cos C + \cos A\cos B = \sin A\sin B = \frac{ab}{4R^2},$$

$$1 + \cos A\cos B\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit,

$$\left(c^2\beta + \frac{b^2}{\gamma} - a^2\right) + \left(a^2\gamma + \frac{c^2}{\alpha} - b^2\right) + \left(b^2\alpha + \frac{a^2}{\beta} - c^2\right) = 0$$

ou

(29) $$\left(1 - \frac{1}{\beta} - \gamma\right)\left(a^2 - \frac{b^2}{\gamma} - \beta c^2\right) = 0.$$

Le lieu du point $O(\alpha\beta\gamma)$ est donc (5) la droite à l'infini

$$\gamma + \frac{1}{\beta} = 1,$$

ou (21) le cercle circonscrit

$$a^2 = \beta c^2 + \frac{b^2}{\gamma},$$

et $\lambda\mu\nu$ serait alors la droite à l'infini ou la droite de Simson.

27. Si l'on veut que les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ soient concourantes, on aura

$$\lambda\mu\nu = -1,$$

ou, en remplaçant,

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a}{\alpha}(\alpha^2 b^2 - c^2)(\cos A - \cos B \cos C) \\ &\quad + \frac{b}{\beta}(\beta^2 c^2 - a^2)(\cos B - \cos A \cos C) \\ &\quad + \frac{c}{\gamma}(\gamma^2 a^2 - b^2)(\cos C - \cos A \cos B) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce lieu du point O est une cubique, étudiée par M. Dewulf (*Nouvelles Annales,* question 1207. Année 1876, p. 550).

28. Lieu géométrique des points tels qu'en joignant chacun d'eux aux sommets du triangle ABC, les perpendiculaires à ces droites, menées par ces sommets, soient concourantes.

Soit $\omega(\alpha\beta\gamma)$ un point du lieu.

Les perpendiculaires aux droites ωA, ωB, ωC, me-

nées par A, B, C, ont pour coordonnées (22)

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c(c - \alpha b \cos A)}{b(c \cos A - \alpha b)}, \\ \beta_1 &= \frac{a(a - \beta c \cos B)}{c(a \cos B - \beta c)}, \\ \gamma_1 &= \frac{b(b - \gamma a \cos C)}{a(b \cos C - \gamma a)}, \end{aligned} \right.$$

et, comme l'on veut qu'elles soient concourantes,

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = -1,$$

ou l'équation (29). Le lieu du point ω est donc la droite à l'infini ou le cercle circonscrit.

29. En écrivant que les points α_1, β_1, γ_1 sont en ligne droite, on retrouvera la cubique (30) pour le lieu du point ω.

30. Mener par l'orthocentre $O(\alpha\beta\gamma)$ du triangle ABC une perpendiculaire à une droite $X(\lambda\mu\nu)$.

Soit $X_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$ cette perpendiculaire.

On aura ses coordonnées par la formule (27) et les équations

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = 1, \qquad \frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1.$$

On trouve ainsi

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha\nu(\mu - 1)}{1 - \nu}, \\ \mu_1 &= \frac{\beta\lambda(\nu - 1)}{1 - \lambda}, \\ \nu_1 &= \frac{\gamma\mu(\lambda - 1)}{1 - \mu}. \end{aligned} \right.$$

On voit par là que X_1 est indéterminé si X est à l'infini.

31. Les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre

$O(\alpha\beta\gamma)$ sur les droites $O_1 A$, $O_1 B$, $O_1 C$ qui joignent un point quelconque $O_1(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ aux sommets de ABC, coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite.

Si λ, μ, ν sont ces points, on trouve, en effet,

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \qquad \mu = \frac{\beta}{\beta_1}, \qquad \nu = \frac{\gamma}{\gamma_1};$$

d'où

$$\lambda\mu\nu = +1.$$

32. *Équation de la conique.* — Soit $O(xyz)$ un point d'une conique Q, coupant les côtés ABC en λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1.

On a

$$(33) \qquad xyz = -1, \qquad \lambda\mu\nu\lambda_1\mu_1\nu_1 = +1.$$

Pour que le point O appartienne à la conique Q, il faut et il suffit que les côtés opposés de l'hexagone

$$\mu\mu_1 O \nu_1 \nu\lambda$$

se coupent en trois points en ligne droite. Ces points sont

$$\text{A, I, H} \quad \text{ou} \quad (\mu\mu_1, \nu\nu_1), \quad (\lambda\nu, \mu_1 O), \quad (\lambda\mu, \nu_1 O).$$

Les coordonnées des droites AI et AH sont (8)

$$\frac{\lambda[\nu(\mu_1 - y)x - 1]}{\lambda\mu_1\nu - 1}, \qquad \frac{1 - \lambda\mu\nu_1}{(\nu_1 - z)y - \mu\nu_1},$$

et, puisque ces droites doivent se superposer, on a

$$\frac{\lambda[\nu(\mu_1 - y)x - 1]}{\lambda\mu_1\nu - 1} = \frac{1 - \lambda\mu\nu_1}{(\nu_1 - z)y - \mu\nu_1}.$$

Telle est, en coordonnées segmentaires, l'équation de la conique Q.

Elle peut s'écrire

$$(34)\quad \begin{cases} \lambda\lambda_1\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{y}\right) \\ \qquad -\frac{y}{\mu\mu_1}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_1}-\frac{1}{z}\right)=0 \end{cases}$$

ou encore

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{1}{z^2}+\left[(\mu+\mu_1)x-\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu_1}\right)\right]\frac{1}{z} \\ \qquad +\mu\mu_1(x-\lambda)(x-\lambda_1)=0. \end{cases}$$

33. Avec $\lambda\mu\nu=1$, $\lambda_1\mu_1\nu_1=1$, cette dernière équation se décompose en les deux suivantes

$$\frac{\lambda}{x}+\frac{y}{\mu}=1, \qquad \frac{\lambda_1}{x}+\frac{y}{\mu_1}=1,$$

et la conique Q se réduit au système des deux droites

$$X(\lambda\mu\nu) \quad \text{et} \quad X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1).$$

Si l'on avait de plus

$$x=\frac{\nu_1-\nu}{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)},$$

les racines de cette équation seraient égales à

$$\frac{1}{z}=\frac{\mu\mu_1(\lambda-\lambda_1)}{\mu_1-\mu}$$

et ces valeurs de x et de $\frac{1}{z}$ appartiendraient au point XX_1, comme on l'a vu (8).

34. Pour que la conique soit un cercle, il faut que

$$\frac{a^2}{(1-\lambda)(1-\lambda_1)}=\frac{\mu\mu_1 b^2}{(1-\mu)(1-\mu_1)}=\frac{c^2}{\lambda\lambda_1(1-\nu)(1-\nu_1)},$$

et ces conditions sont remplies par les coordonnées du centre de gravité et de l'orthocentre.

35. *Cercle des neuf points.* — On aura son équation en remplaçant dans (35) λ, μ, ν par les coordonnées du centre de gravité et λ_1, μ_1, ν_1 par celle de l'orthocentre.

On trouve ainsi

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} bc\cos A\left(\dfrac{1}{z}\right)^2-(b^2x-c^2)\dfrac{1}{z} \\ \quad +a(b\cos C\,x^2+ax+c\cos B)=0. \end{array}\right.$$

36. *Conique inscrite dans le triangle de référence.* — Soit une conique touchant les côtés de ABC en λ, μ, ν.

On a ici

$$\lambda=\lambda_1,\qquad \mu=\mu_1,\qquad \nu=\nu_1,$$

et, par suite,

$$\lambda\mu\nu=-1,$$

ou les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont concourantes, et l'équation (35) devient

$$(37)\qquad \frac{1}{z}=-\mu(\sqrt{\lambda}\pm\sqrt{x})^2.$$

37. *Centre de la conique inscrite.* — Ce centre O est le point de rencontre des droites joignant les sommets de ABC aux milieux I, H, K des côtés de $\lambda\mu\nu$.

Il a pour coordonnées

$$\frac{1-\nu}{\nu(1-\mu)},\quad \frac{1-\lambda}{\lambda(1-\nu)},\quad \frac{1-\mu}{\mu(1-\lambda)}.$$

38. *Cas de la parabole.* — Les droites AI et BH seront parallèles (13) si

$$(38)\qquad \lambda+\frac{1}{\mu}=1$$

et alors le centre O est rejeté à l'infini, ou la conique se transforme en une parabole.

On arriverait au même résultat en écrivant que la droite à l'infini $\frac{1}{z} = 1 - x$ est tangente à la conique.

39. *Tangente à la conique inscrite.* — Soit la conique inscrite

$$\frac{1}{z} = -\mu(\lambda + x \pm 2\sqrt{\lambda x}),$$

coupée par la sécante $\chi_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ ayant pour équation

$$\frac{\nu_1}{z} + \frac{x}{\lambda_1} = 1.$$

En éliminant $\frac{1}{z}$ on trouve l'équation

$$(\mu - \mu_1)x \pm 2\mu\sqrt{\lambda}\sqrt{x} + (\lambda\mu + \lambda_1\mu_1) = 0,$$

dont les racines appartiennent aux points de rencontre de la sécante avec la conique.

Cette sécante devient tangente si

$$(39) \qquad \frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\mu} = 1,$$

et cette condition exprime que le point $(A\lambda_1, B\mu_1)$, soit R, appartient à $\lambda\mu$.

Si donc on appelle P et Q les points $(B\mu_1, C\nu_1)$ et $(A\lambda_1, C\nu_1)$ le triangle diagonal PQR du quadrilatère circonscrit à la conique est inscrit dans le triangle $\lambda\mu\nu$.

Soit $T(x, y, z)$ le point de contact.

On a

$$x = \frac{\lambda\mu^2}{\mu - \mu_1}$$

ou (form. 39)

$$x = \frac{\lambda_1^2}{\lambda}.$$

Les coordonnées de T sont donc

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda}, \quad \frac{\mu_1^2}{\mu}, \quad \frac{\nu_1^2}{\nu}.$$

De plus, les droites λP, μQ, νR passent par T. La droite λP, par exemple, qui a pour coordonnées

$$\lambda, \quad \frac{1}{\nu_1(\lambda+\lambda_1)}, \quad \frac{\nu_1(\lambda+\lambda_1)}{\lambda};$$

coupe χ_1 au point

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda}, \quad \frac{\mu_1^2}{\mu}, \quad \frac{\nu_1^2}{\nu},$$

c'est-à-dire en T.

40. Si la conique est une parabole, elle admet pour tangente la droite à l'infini, et cette droite forme avec les côtés de ABC un quadrilatère circonscrit qui doit jouir des propriétés précédentes.

On aura le triangle PQR en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés, et les coordonnées du point de contact T seront

$$\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\nu}.$$

Si donc λ_1, μ_1, ν_1 sont les symétriques des points λ, μ, ν par rapport aux milieux des côtés de ABC, les six droites

$$A\lambda_1, \quad B\mu_1, \quad C\nu_1, \quad P\lambda, \quad Q\mu, \quad C\nu$$

seront parallèles à l'axe de la parabole.

Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite et, si ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle, cette droite passe par le centre O.

Coupons le triangle ABC par la sécante $\chi_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

Il faut prouver que les milieux I, H, K des diagonales $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$ du quadrilatère des quatre droites sont en ligne droite.

En effet, les cordonnées des points I, H, K, qui sont

$$\begin{vmatrix} \text{I}\ldots\ldots & \lambda_1 & \dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_1-1} \\ \text{H}\ldots\ldots & \dfrac{1}{\mu_1-1} & \mu_1 & \dfrac{1-\mu_1}{\mu_1} \\ \text{K}\ldots\ldots & \dfrac{1-\nu_1}{\nu_1} & \dfrac{1}{\nu_1-1} & \nu_1 \end{vmatrix}$$

satisfont à la condition (20).

Soit

$$\text{O} : -\frac{c}{b}, \quad -\frac{a}{c}, \quad -\frac{b}{a}$$

le centre du cercle inscrit dans ABC.

Les trois points O, I, H seront en ligne droite s'ils satisfont à la condition (20), ou si l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda_1 & \lambda_1 \\ \mu_1-1 & \mu_1 & 1 \\ -b & -a & c \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(p-b) + \lambda_1(p-c) + \lambda_1\mu_1(p-a) = 0,$$

ce qui est précisément la condition (39), puisque ici

$$\lambda = -\left(\frac{p-b}{p-c}\right), \qquad \mu = -\left(\frac{p-c}{p-a}\right), \qquad \nu = -\left(\frac{p-a}{p-b}\right).$$

La droite IHK ne passera donc par le centre O qu'autant que χ_1 sera une tangente à ce cercle O.

On sait que OIH est la droite de Newton.

41. *Conique circonscrite à* ABC. — Coupons le triangle ABC par la droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$. La pascale

AABBCC,

ou X, montre qu'il existe une conique tangente en A, B, C aux droites Aλ, Bμ, Cν. L'équation de cette conique, devant être du second degré, sera, dans le système segmentaire, l'une des suivantes

$$(40)\qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,\qquad \frac{\beta}{\mu}+\frac{\nu}{\gamma}=1,\qquad \frac{\gamma}{\nu}+\frac{\lambda}{\alpha}=1,$$

car si un point O(α, β, γ) parcourt la courbe, on aura, à ses passages aux sommets A, B, C,

$$\beta=\infty,\qquad \gamma=\infty,\qquad \alpha=\infty$$

et, par suite (éq. 40),

$$\alpha=\lambda,\qquad \beta=\mu,\qquad \gamma=\nu,$$

c'est-à-dire les tangentes en A, B, C.

On voit l'analogie de ces équations avec celles de la droite ou du point. Elles se réduisent d'ailleurs en coordonnées normales à la seule

$$(41)\qquad \frac{1}{axx'}+\frac{1}{byy'}+\frac{1}{czz'}=0,$$

et redonnent celles du cercle circonscrit, en y remplaçant λ, μ, ν par

$$\frac{c^2}{b^2},\quad \frac{a^2}{c^2},\quad \frac{b^2}{a^2}.$$

Il est évident que la nature de la conique doit dépendre de la position occupée par la droite X.

42. Les équations (40), mises sous la forme

$$\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\mu}}=1,\qquad \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\beta}}+\frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\nu}}=1,\qquad \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\gamma}}+\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\lambda}}=1,$$

expriment que quand le point O(α, β, γ) décrit la

conique (40), le point $O_1\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, isotomique de O par rapport au triangle ABC, se déplace sur la droite $\chi_1\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, isotomique de $\chi(\lambda, \mu, \nu)$. D'ailleurs, quand le point O passe par les sommets A, B, C, le point O_1 traverse les côtés opposés a, b, c.

43. *Équations (tangentielles) de la conique inscrite à* ABC. — Soit le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$. Le brianchon

$$aabbcc,$$

ou O, montre qu'il existe une conique tangente aux côtés de ABC en α, β, γ.

Si une droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$ se meut tangentiellement à cette conique, ses coordonnées variables λ, μ, ν satisferont aux équations (40), car lorsque cette droite χ se superpose aux côtés a, b, c, on a

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \lambda = 0.$$

et, par suite (éq. 40),

$$\lambda = \alpha, \qquad \mu = \beta, \qquad \nu = \lambda,$$

On peut donc regarder ces équations comme étant les équations *tangentielles* de la conique inscrite.

La parabole sera d'ailleurs caractérisée par l'égalité

$$\alpha + \frac{1}{\beta} = 1,$$

exprimant qu'elle admet pour tangente la droite à l'infini (1, 1, 1).

L'ellipse tangente aux milieux des côtés de ABC a pour équation

$$\frac{1}{\lambda} + \mu + 1 = 0.$$

Les équations (40) deviennent, en coordonnées an-

gulaires,

$$(42)\quad \frac{\lambda'}{\alpha'}+\frac{\beta'}{\mu'}=1,\qquad \frac{\mu'}{\beta'}+\frac{\gamma'}{\nu'}=1,\qquad \frac{\nu'}{\gamma}+\frac{\alpha'}{\lambda'}=1,$$

et se réduisent à (41), en coordonnées normales.

44. Les équations (40), mises sous leur seconde forme (n° 42), montrent que quand la droite $\chi(\lambda, \mu, \nu)$ se meut tangentiellement à la conique inscrite, la droite $\chi_1\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, isotomique de χ par rapport à ABC, tourne autour du point *fixe* $O_1\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$, isotomique de $O(\alpha, \beta, \gamma)$. D'ailleurs, lorsque cette droite χ se superpose aux côtés a, b, c, la droite χ_1 passe par les sommets A, B, C. (*A suivre.*)

SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE ET SES APPLICATIONS;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN,
Élève du lycée de Pau.

Nous nous proposons dans cette Note de rattacher les uns aux autres un certain nombre de problèmes, qui paraissent au premier abord bien différents, et où l'on trouve comme lieu une *strophoïde* droite ou oblique.

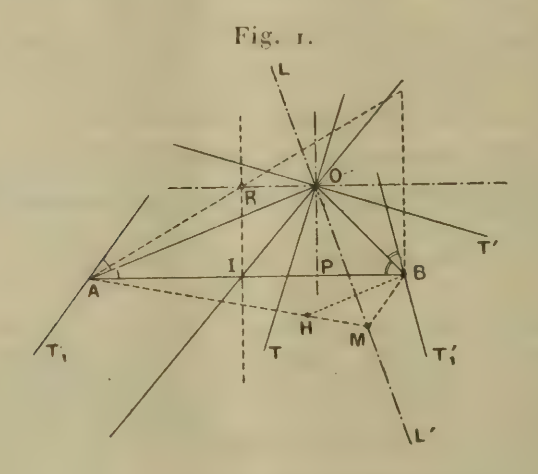
Nous partirons du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donnés dans un plan* (*fig.* 1) *trois points fixes* A, B, O, *le lieu des points* M *tels que la bissectrice de l'angle* AMB (*ou de son supplément*) *passe par* O *est une strophoïde dont le point double est en* O.

Il est d'abord évident que le point O est un point

double du lieu, puisque les deux bissectrices de l'angle AOB passent par O; et sur une droite quelconque LL′ issue de O se trouve un point du lieu, et un seul, que

Fig. 1.



l'on obtient en prenant le point d'intersection avec AH, H étant le symétrique de B par rapport à LL′. La courbe est donc du troisième ordre, elle passe par les points cycliques I et J, puisque la droite AI, par exemple, fait un angle indéterminé avec elle-même. La cubique est donc circulaire. Enfin, il est facile de voir que les tangentes au point double O sont les bissectrices de l'angle AOB, en supposant qu'un point du lieu se rapproche indéfiniment de O. La courbe est en définitive une cubique circulaire admettant un nœud à tangentes rectangulaires : c'est donc une strophoïde. Exprimons d'ailleurs analytiquement, et en prenant pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant par O, que les tangentes des angles AMO, BMO (M étant un point du lieu) sont égales, nous aurons, en appelant (a, b), (a', b') les coordonnées des points A et B,

$$\frac{\dfrac{y-b}{x-a}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\,\dfrac{y-b}{x-a}}+\frac{\dfrac{y-b'}{x-a'}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\,\dfrac{y-b'}{x-a'}}=0$$

ou

$$\frac{ay - bx}{x^2 + y^2 - ax - by} = -\frac{a'y - b'x}{x^2 + y^2 - a'x - b'y}.$$

Sous cette forme, trois points du lieu sont en évidence : le point O et les points de rencontre de OA, OB, avec les cercles décrits sur OA et OB comme diamètres, c'est-à-dire les points A, B et P, projection de O sur AB. En écrivant l'équation ainsi

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)[(a + a')y - (b + b')x]\\ + (ab' + ba')(x^2 - y^2) + 2(bb' - aa')xy = 0,\end{aligned}$$

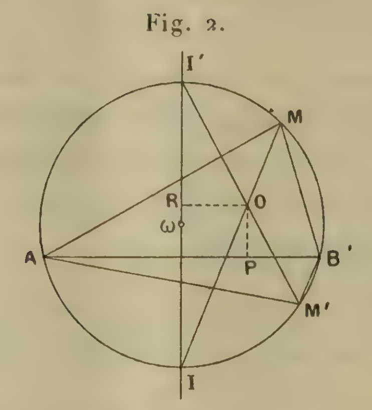
on reconnaît bien une strophoïde ayant pour point double l'origine, pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle AOB, pour direction asymptotique la droite OI, I étant le milieu de AB.

En supposant que la droite LL' tourne autour de O, on vérifie que dans les positions OA, OB, OP et OR parallèle à AB, les points A, B, P et R, projection de O sur la perpendiculaire au milieu de AB, font partie du lieu, et dans la position OI le point correspondant est rejeté à l'infini. On voit en outre que les tangentes aux points A et B sont les symétriques de AB par rapport à AO et BO, en faisant approcher indéfiniment LL' de OA ou OB. La strophoïde est ainsi plus que suffisamment déterminée, et l'on peut construire son point fixe puisqu'on connaît la direction asymptotique issue du point double et plusieurs points de la courbe.

Une autre génération simple du lieu consisterait à en déterminer les deux points situés sur un cercle quelconque passant par A et B (*fig.* 2). On voit que l'on obtient ces deux points en joignant I et I' situés sur le diamètre perpendiculaire à AB, au point O, ce qui détermine M et M'. Cette construction du lieu, en faisant varier le cercle, montre encore que le point O est

point double, et que la courbe passe par les points A, B, P, R.

Fig. 2.



Parmi les applications immédiates du théorème tel que nous l'avons énoncé, signalons les suivantes :

1. *Lieu des foyers des coniques tangentes en deux points donnés à deux droites données.*

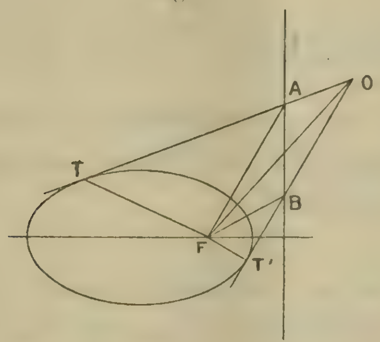
Si F est un point du lieu, on sait, en effet, que la droite joignant ce point au point de rencontre O des deux tangentes données est bissectrice de l'angle AFB, A et B désignant les points de contact. Donc le lieu est une strophoïde ayant O pour point double et dont on construit immédiatement plusieurs éléments.

2. *Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données et admettant pour directrice une droite donnée.*

Soient, en effet, O le point de concours des tangentes, A et B leurs points de rencontre avec la directrice donnée, T et T' les points de contact, et F un point du lieu. Les deux angles OFT, OFT' sont égaux, ainsi que les deux angles AFT, BFT' (droits tous les deux) : donc les deux angles OFA, OFB sont aussi égaux (*fig.* 3). Les

points A et B sont fixes, et la bissectrice de l'angle AFB est assujettie à passer le point fixe O : le lieu est une strophoïde.

Fig. 3.



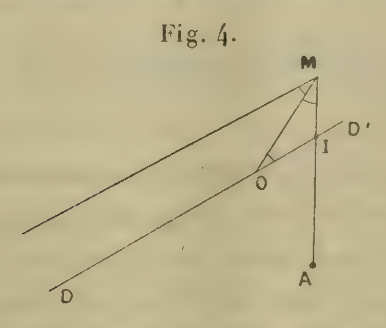
Examinons maintenant les divers cas particuliers du théorème, tous utiles dans les applications :

1° Si le triangle AOB est isoscèle, la hauteur du triangle isoscèle issue de O faisant évidemment partie du lieu, celui-ci se décompose en cette droite et un cercle, le cercle circonscrit au triangle AOB. Pour un point quelconque de ce cercle, la bissectrice de l'angle AMB va, en effet, passer par le milieu de l'arc AB.

Les points A, O, B ne sont pas assujettis à rester à distance finie. Si le point A est à l'infini, dans une direction DD′ passant par O, on a le théorème suivant :

Étant donnés dans un plan deux points fixes, O, A

Fig. 4.



(*fig.* 4) *et une direction* DD′ *passant par* O, *le lieu des points* M *tels que* OM *soit bissectrice de l'angle*

ayant pour côtés AM *et la parallèle à* DD′ *menée par* M *est une strophoïde dont le point double est en* O *et dont la direction asymptotique est* DD′.

Il est à remarquer que le point A est le point fixe de la strophoïde.

En s'appuyant sur ce théorème, on trouve immédiatement la solution des problèmes suivants, que nous citons comme exemples.

3. *Dans un cercle, on considère un rayon fixe* OA *et un rayon mobile* OB. *Lieu de l'orthocentre du triangle* AOB.

Si H est un point du lieu, HO étant bissectrice de l'angle AHB, le lieu est une strophoïde (droite) dont O est le point double, A le point fixe.

4. *Lieu des foyers des hyperboles tangentes à une droite donnée en un point donné et admettant pour asymptote une droite donnée.*

Si O est le point de rencontre de la tangente avec l'asymptote, A le point de contact de la tangente, la droite FO est bissectrice de l'angle formé par FA et la parallèle à l'asymptote menée par F.

5. *Podaire d'un point quelconque de la directrice d'une parabole.*

Soient (*fig.* 5) F le foyer, A le sommet, M le point donné, P un point du lieu. Menons de P la parallèle PL à la directrice, et désignons par I le point de rencontre de la tangente en A avec le rayon vecteur du point M. On a

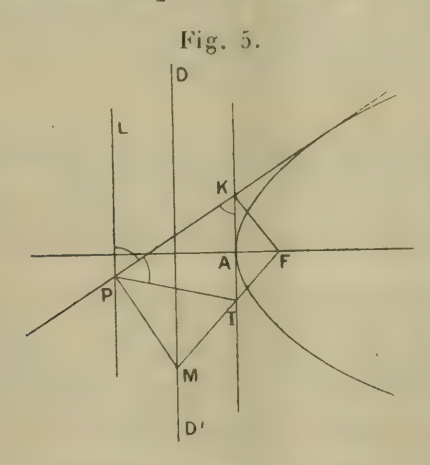
$$\widehat{LPK} = \widehat{PKI},$$

et le triangle KIP est isoscèle puisque le point I est le milieu de FM, donc

$$\widehat{LPK} = \widehat{KPI},$$

PM, perpendiculaire sur PK, sera donc bissectrice de l'angle IPL. Le lieu du point P est donc une strophoïde

Fig. 5.



ayant son point double en M, son point fixe en I, et sa direction asymptotique parallèle à la directrice (l'asymptote est la symétrique de la tangente au sommet par rapport à la directrice).

Dans le cas où le point O est à l'infini, dans une direction donnée AX, BX′, le problème revient à déterminer les points M tels que la bissectrice de l'angle AMB soit parallèle à une direction fixe. La strophoïde peut alors être considérée comme ayant son point double à l'infini : c'est une hyperbole équilatère. Si l'on prend, en effet, sur une hyperbole équilatère donnée, un point M et deux points fixes A et B diamétralement opposés, les bissectrices de l'angle AMB sont constamment parallèles aux asymptotes.

Exemples :

6. *Lieu des foyers des coniques dont on donne deux tangentes parallèles et le diamètre des contacts.*

7. *Lieu des points de contact des tangentes menées à une famille de coniques homofocales parallèlement à une direction donnée.*

Si M est le point de contact, la tangente est, en effet, bissectrice de l'un des angles FMF′, F et F′ désignant les deux foyers. Le centre de l'hyperbole équilatère est le centre des coniques homofocales.

Nous allons maintenant, comme applications, passer à une série de questions relatives aux coniques homofocales et où l'on trouve comme lieu une strophoïde.

8. Supposons d'abord qu'on donne dans le plan deux points fixes, A et B, et un troisième point fixe O. Du point O on décrit une série de cercles concentriques, et l'on demande le lieu des points de concours des tangentes menées à ces cercles par les points fixes A et B.

Soient C, D, E, F les quatre points de rencontre relatifs à un cercle particulier. On voit immédiatement que les angles ACB, ADB, AEB, AFB ont une de leurs bissectrices passant par le point fixe O. Le lieu cherché est donc la strophoïde dont O est le point double, qui passe par A, B et le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur AB ; ce point correspond au cas où la circonférence est tangente à la droite AB.

Remarquons qu'en faisant une transformation homographique de façon que les points A et B deviennent les points cycliques, les cercles concentriques se transformeraient en des coniques bitangentes en deux points fixes ; les points C, D, E, F deviendraient les foyers de ces coniques : nous serions ramenés au problème (1).

9. Considérons maintenant une famille de coniques ayant pour foyers deux points fixes F, F′. Soient A et B

deux points pris sur l'une d'elles. D'après un théorème dû à Chasles : « Pour que les tangentes menées de deux points A et B à une conique forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle, il faut et il suffit que les points A et B appartiennent à une conique homofocale à la proposée. » Le quadrilatère formé par les tangentes menées de A et B à une conique (C) de la famille est donc circonscrit à un cercle dont le centre s'obtiendra en prenant le point de concours des bissectrices des angles FAF′, FBF′ (les points A et B étant supposés de côtés différents de l'axe focal), puisque les angles des tangentes menées d'un point fixe à une famille de coniques homofocales admettent les mêmes bissectrices. Il en résulte que tous les cercles inscrits dans les quadrilatères formés par les tangentes menées de A et B à chacune des coniques de la famille ont tous pour centre le point fixe ω, pôle normal de la corde AB dans la conique considérée. On peut donc, d'après le théorème précédent (8), énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une famille de coniques homofocales, si par deux points A *et* B *pris sur l'une d'elles, on mène les tangentes à une conique quelconque de la famille, le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une strophoïde passant par* A, B, *et dont le point double est le pôle normal ou tangentiel de la corde* AB, *par rapport à la conique considérée, et suivant que les points* A *et* B *sont de côtés différents ou du même côté de l'axe focal.*

Remarquons que la strophoïde passe par les foyers, puisque les deux points F, F′ constituent une conique de la famille, à laquelle les droites AF, AF′, BF, BF′ sont tangentes.

Si l'on considère une conique particulière (C) et

deux points A et B sur cette conique, situés, par exemple, du même côté du grand axe, on voit que l'on peut déduire du théorème précédent, l'énoncé suivant :

10. *Deux points quelconques étant pris sur une conique, les droites joignant chacun d'eux aux deux foyers forment un quadrilatère complet dont les six sommets appartiennent à une strophoïde ayant pour point double le pôle tangentiel de la corde* AB (*si ces deux points sont du même côté de l'axe focal*) *et pour direction asymptotique le diamètre conjugué à la corde* AB.

Cette strophoïde passe, comme nous le savons, par les projections du point double sur la corde AB et sur les axes de la conique C. Nous la retrouverons dans les questions qui vont suivre.

11. Supposons alors que les deux points A et B se rapprochent indéfiniment sur la conique (C) considérée et viennent se confondre. Le lieu (9) devient le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe A à une famille de coniques homofocales. C'est donc une strophoïde passant par les foyers et ayant son point double au point A. Considérons d'ailleurs une tangente quelconque AM, M étant le point de contact. La droite MA est l'une des bissectrices de l'angle FMF'. C'est toujours le même problème que nous traitons.

12. Puisque deux coniques homofocales sont orthogonales en leurs points d'intersection, le point de contact M d'une tangente menée d'un point A est le pied d'une normale issue de A à la seconde conique de la famille passant par M. D'où cet énoncé :

Le lieu des pieds des normales menées d'un point

fixe à une famille de coniques homofocales est une strophoïde ayant son point double au point considéré.

13. Considérons de nouveau deux points A et B sur une conique (C) et supposons-les situés, par exemple, du même côté de l'axe focal. Nous savons alors que le lieu des points de rencontre des tangentes menées de A et B à toutes les coniques homofocales à (C) est une strophoïde passant par A et B et dont le point double est le pôle ω de AB par rapport à la conique C. Il existe en particulier une conique de la famille tangente à la droite AB, et son point de contact M fait partie du lieu. Mais nous savons que le troisième point de la strophoïde situé sur AB est le pied de la perpendiculaire abaissée du point double ω. Le point M est donc le pied de cette perpendiculaire; en d'autres termes, le point M est la projection du point ω sur sa polaire. D'où cet énoncé :

La projection d'un point du plan d'une conique sur sa polaire est le point de contact de la conique homofocale tangente à cette polaire.

Il en résulte immédiatement que cette projection est un point tel que l'une des bissectrices de l'angle formé par les droites qui la joignent aux deux foyers passe par le point considéré. De là le théorème suivant :

Le lieu des projections d'un point fixe sur ses polaires par rapport aux coniques ayant pour foyers deux points donnés est une strophoïde passant par les foyers et ayant son point double au point fixe.

Il est maintenant absolument évident que les lieux (9), (11), (12), (13) relatifs à un point ω du plan forment une seule et même courbe, puisque l'on n'a

fait que résoudre dans ces divers cas le problème : Trouver le lieu des points M tels que Mω soit bissectrice de l'angle FMF'. On voit d'ailleurs facilement que les strophoïdes obtenues ont au moins neuf points communs.

14. Supposons qu'un point P décrive une droite D. Ses polaires par rapport à une conique C vont se couper en un point fixe P_1. Soit K le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des points P sur sa polaire. La droite KP est une bissectrice de l'angle FKF' (13) : donc la perpendiculaire KP_1 est l'autre bissectrice. Cette bissectrice passant par le point fixe P_1, on peut énoncer la propriété suivante :

Lorsqu'un point parcourt une droite, les pieds des perpendiculaires menées de chaque position du point sur sa polaire décrivent une strophoïde dont le point double est le pôle de la droite et la direction asymptotique, le diamètre conjugué à la droite donnée.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Étant donnée une conique et un point P, *dans son plan, si l'on mène par ce point une sécante quelconque dont on prend le pôle* P *par rapport à la conique, le lieu des projections des points* P *sur la sécante est une strophoïde dont le point double est en* P_1 *et qui passe par les foyers de la conique.*

Ce dernier lieu est évidemment le même pour toutes les coniques homofocales.

15. Le lieu (9) peut être généralisé. Assujettir les points A et B à se trouver sur une conique de la famille,

c'est assujettir le quadrilatère ABFF' à être circonscriptible à un cercle. L'énoncé général sera le suivant :

On considère deux familles de coniques homofocales ayant pour foyers deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscriptible. Le lieu des points de rencontre des tangentes communes est une strophoïde dont le point double est au centre du cercle inscrit dans le quadrilatère.

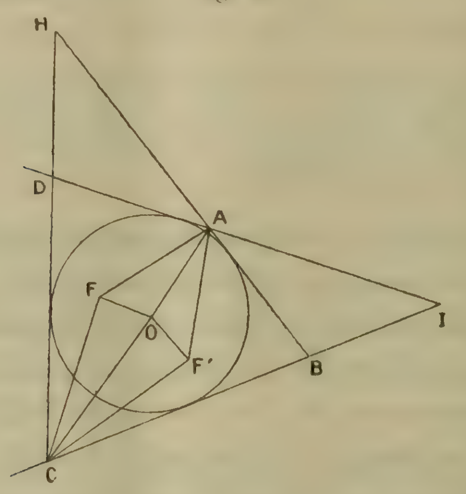
Soient, en effet, ω le centre du cercle inscrit, A et B, C et D les deux couples de sommets opposés, M un point du lieu. Les deux angles AMB et CMD auront les mêmes bissectrices, puisque M est le point de concours de deux tangentes communes, et l'une de ces bissectrices passera par le point ω, puisque les droites (MA, MB), (MC, MD) sont les tangentes menées de M à deux coniques inscrites dans le quadrilatère et que toutes ces tangentes, parmi lesquelles se trouvent les tangentes au cercle ω, forment un faisceau en involution.

16. En faisant une transformation homographique des coniques homofocales, de façon que deux points A et B pris sur l'une d'elles deviennent les points cycliques, les coniques homofocales se transforment en un faisceau de coniques inscrites dans un quadrilatère. Ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle, puisque les points I et J, transformés de A et B, appartiennent à une conique de la famille. Le problème (9) ainsi transformé nous amène à chercher le lieu des points de rencontre des tangentes menées de I et J, c'est-à-dire le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible. Cette courbe est du troisième ordre : je dis que c'est une strophoïde.

Soient, en effet, ABCD, (AC), (BD) désignant les

deux couples de sommets opposés, un quadrilatère circonscrit à un cercle O et S une conique inscrite dans ce quadrilatère (*fig.* 6). Les points A et C peuvent être

Fig. 6.



considérés comme appartenant à une conique homofocale à S, puisque les tangentes menées de A et C à S forment un quadrilatère circonscrit à un cercle, et le centre O de ce cercle étant le point de concours des bissectrices des angles opposés DAB, DCB. Soient alors F, F′ les foyers de S. Le quadrilatère AFCF′ est donc aussi circonscriptible, d'après le théorème de Chasles, et le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices des quatre angles FAF′, FCF′, AFC, AF′C; en particulier, des angles FAF′, FCF. Mais les angles FAF′ et DAB ont les mêmes bissectrices, de même les angles FCF′, DCB. Donc le centre du cercle inscrit dans le quadrilatère AFCF′ se confond avec le point O. Les bissectrices des angles AFC, AF′C vont passer par le point O. Le lieu des points F et F′ est donc bien une strophoïde dont le point double est en O, et qui passe par A et C.

En répétant le même raisonnement pour les deux

autres couples de sommets opposés, on verrait que la strophoïde lieu passe aussi par les points C, D, H, I.

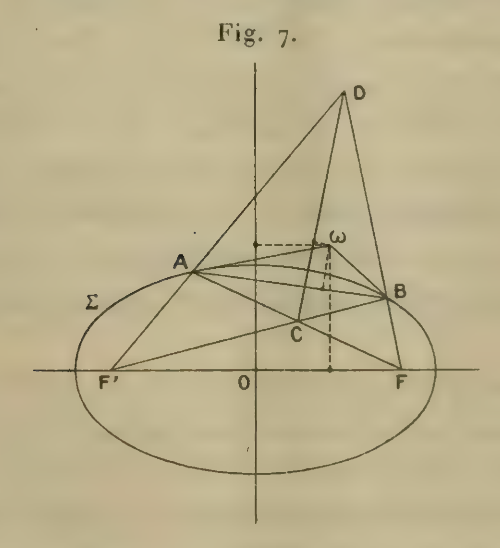
Elle passera aussi par les projections du centre du cercle, qui est le point double, sur les diagonales AC, BD, HI. Elle passera encore par les projections de ce centre sur les perpendiculaires aux milieux des diagonales.

Pour avoir sa direction asymptotique, il faut joindre le point O au milieu d'une diagonale ; ces trois droites doivent se confondre (on retrouve ainsi la propriété de la droite de Newton du quadrilatère).

Nous arrêterons là l'étude des applications du théorème que nous avons signalé au début. En combinant les divers résultats obtenus, on peut donner l'énoncé général suivant des propriétés étudiées, dont la plupart sont, séparément, bien connues. Nous ne ferons que mettre en évidence l'identité de tous ces lieux.

Étant donnés une conique Σ *de foyers* F, F′, *de centre* O, *et un point fixe* ω *dans son plan* (*fig.* 7), A

Fig. 7.



et B *étant deux points de la courbe, en joignant ces deux points aux foyers, on forme un quadrilatère cir-*

conscriptible à un cercle, dont les six sommets sont A, B, C, D, F, F′. *Soit* ω *le centre du cercle inscrit, c'est-à-dire le point de concours des tangentes (ou des normales) en* A *et* B. *Il existe une strophoïde* S *dont le point double est* ω, *les tangentes en ce point étant les bissectrices communes des angles formés par les droites joignant* ω *à deux couples de sommets opposés du quadrilatère, en particulier aux points* F, F′, *la direction asymptotique étant celle de la droite de Newton du quadrilatère, c'est-à-dire le diamètre conjugué à* AB *dans la conique* Σ. *Cette strophoïde passe par les points suivants : les six sommets du quadrilatère complet* A, B, C, D, F, F′ (*la tangente au point* A, *par exemple, étant la symétrique de* AB *par rapport à* Aω), *les projections de* ω *sur les axes de la conique, sur les diagonales* AB, CD *et sur les droites perpendiculaires en leur milieu, par les pieds des normales menées de* ω *à la conique* Σ. *Cette strophoïde* S *jouit des propriétés suivantes :*

1° *Elle est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère ;*

2° *Le lieu des points de concours des tangentes communes aux coniques admettant pour foyers deux couples de sommets opposés du quadrilatère, en particulier le lieu des points de rencontre des tangentes menées de deux sommets opposés aux coniques admettant pour deux foyers deux autres sommets opposés ;*

3° *Le lieu des projections du point* ω *sur les axes de toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère ;*

4° *Le lieu des points de contact des tangentes, des pieds des normales menées de* ω *à l'une quelconque de ces coniques, le lieu des projections du point* ω *sur ses polaires, le lieu des projections des différents points*

de la polaire de ω par rapport à l'une quelconque de ces coniques sur leurs propres polaires par rapport à la même conique (14).

(Soit, en effet, σ une conique particulière inscrite dans le quadrilatère, la strophoïde S′ relative à σ et au point ω contient les foyers, les points de contact des tangentes, les pieds des normales, les projections de ω sur les axes de la conique et sur sa polaire; cette strophoïde S′ n'est autre que la strophoïde S, car ces deux courbes ont en commun les points cycliques, le point à l'infini sur la droite de Newton, les deux foyers de σ, plus les six sommets du quadrilatère ou les projections de ω sur les diagonales et les perpendiculaires en leurs milieux, qui sont les points de ces lieux relatifs aux coniques infiniment aplaties du faisceau.)

Ces diverses propriétés s'étendent en outre à toutes les coniques homofocales à chacune des coniques inscrites dans le quadrilatère, en particulier à toutes les coniques homofocales à la conique ayant pour foyers deux sommets opposés F, F′ du quadrilatère.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1892 (DEUXIÈME SESSION). SOLUTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. J. S.

On donne deux axes rectangulaires et un point A *dont les coordonnées sont* p *et* q. *Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine*

et l'autre un point C *de l'axe des x dont l'abscisse est a.*

Par le point A *on mène deux sécantes* DAE, FAG *ayant une longueur commune donnée $2l$ (les points* D *et* F *sont sur l'une des circonférences, et les points* E *et* G *sont sur l'autre).*

1° *Former l'équation générale des coniques* Δ *passant par les points d'intersection des deux sécantes* DAE, FAG *avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point* C;

2° *Si l'on assujettit une des coniques* Δ *à passer par un point* P *du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point* P;

3° *Déterminer le lieu du centre des coniques* Δ;

4° *En faisant varier l, trouver le lieu du point de rencontre des cordes* DF, EG.

I. Soit

$$y = q + m(x - p)$$

l'équation de la droite FAG, m étant un paramètre à déterminer. Cette droite coupe le cercle O en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_f = \frac{m^2 p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

La droite FAG coupe le cercle C en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_g = \frac{2a + m^2 p - p - 2mq}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{q + 2am - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

Le coefficient angulaire m est déterminé par

$$(x_g - x_f)^2 + (y_g - y_f)^2 = 4\,l^2,$$

ou

$$4\,a^2 + 4\,a^2 m^2 = 4\,l^2(1 + m^2)^2\,;$$

d'où

$$m = \pm\,\frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}\,;$$

et la condition de possibilité est $a > l$.

L'équation de FAG est donc

$$y - q = \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}\,(x - p),$$

l'équation de DAE est donc

$$y - q = -\,\frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}\,(x - p).$$

L'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C, sera donc

$$(\Delta)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left[y - q - \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}\,(x - p)\right] \\ \times \left[y - q + \frac{1}{l}\sqrt{a^2 - l^2}\,(x - p)\right] + \lambda\,x(x - a) = 0, \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{array}{l} (a^2 - l^2 - \lambda\,l^2)\,x^2 - l^2 y^2 \\ \quad - [2p(a^2 - l^2) - \lambda\,a l^2]\,x + 2\,q l^2 y + p^2(a^2 - l^2) - l^2 q^2 = 0, \end{array}$$

λ étant un paramètre indéterminé.

II. En faisant passer l'une des coniques Δ par un point P du plan, on détermine λ, et alors cette conique sera une ellipse si

$$\lambda > \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

une hyperbole si

$$\lambda < \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

une parabole si

$$\lambda = \frac{a^2 - l^2}{l^2}.$$

III. Le lieu des centres des coniques Δ est donné par

$$\Delta'_y = 0 \quad \text{ou} \quad -2l^2 y + 2ql^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = q.$$

IV. Les coordonnées du point F sont

$$x_f = \frac{mp^2 - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point G sont

$$x_g = \frac{2a + m^2 p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{2am + q - m^2 q - 2mp}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point D sont données en changeant m en $-m$,

$$x_d = \frac{mp^2 + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_d = \frac{q + 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point E sont trouvées en changeant m en $-m$,

$$x_e = \frac{2a + m^2 p + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_e = \frac{-2am + q - m^2 q + 2mp}{1 + m^2}.$$

On trouve pour l'équation de la droite DF

$$m^2(qy - px + p^2 + q^2) = px - qy + p^2 + q^2,$$

et pour l'équation de la droite EG

$$m^2[(a-p)x+qy-p(a-p)+q^2]$$
$$=q^2-qy-(a-p)x+(a-p)(2a-p).$$

En éliminant m, on a pour le lieu des points de rencontre de ces deux droites

$$a(ap+q^2-p^2)x+aq(2p-a)y-a(a-p)(p^2+q^2)=0$$

ou

$$(ap+q^2-p^2)x+q(2p-a)y-(a-p)(p^2+q^2)=0,$$

qui est l'équation d'une droite.

N. B. — M. Barisien a aussi résolu la question.

SUR UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE NEWTON;

PAR M. P. DELENS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rouen.

On doit à Newton le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite avec une courbe algébrique coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette droite avec les asymptotes de la courbe.

Je me propose de démontrer que ce théorème subsiste quand on remplace la droite par une ligne d'ordre supérieur, et qu'il s'étend au centre des moyennes distances des points communs à deux courbes algébriques quelconques.

Considérons, en effet, deux courbes algébriques C et

C', d'ordres m et p, et soient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,y)=0 \quad \text{ou} \quad f_m(x,y)+f_{m-1}(x,y)+\ldots=0, \\ \text{et} \\ \varphi(x,y)=0 \quad \text{ou} \quad \varphi_p(x,y)+\varphi_{p-1}(x,y)+\ldots=0 \end{cases}$$

les équations de ces deux courbes dans lesquelles on met en évidence les groupes homogènes des divers degrés. Nous aurons les abscisses des points communs à ces deux courbes en éliminant y entre leurs équations, que nous écrirons pour cela sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 y^m + (a_1 x + a'_1) y^{m-1} + (a_2 x^2 + a'_2 x + a''_2) y^{m-2} + \ldots = 0 \\ \text{et} \\ b_0 y^p + (b_1 x + b'_1) y^{p-1} + (b_2 x^2 + b'_2 x + b''_2) y^{p-2} + \ldots = 0. \end{cases}$$

L'équation résultante $R(x)=0$ sera alors

$$R(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 x + a'_1 & a_2 x^2 + a'_2 x + a''_2 & a_3 x^3 + a'_3 x^2 + a''_3 x + a'''_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 x + a'_1 & a_2 x^2 + a'_2 x + a''_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 x + b'_1 & b_2 x^2 + b'_2 x + b''_2 & b_3 x^3 + b'_3 x^2 + b''_3 x + b''_3 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 x + b'_1 & b_2 x^2 + b'_2 x + b''_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que cette équation est en général de degré mp et que le coefficient de son terme de degré le plus élevé est le résultant des deux polynômes $f_m(x,y)$ et $\varphi_p(x,y)$. Je me propose de montrer que le coefficient du terme en x^{mp-1} dans l'équation $R(x)=0$ dépend uniquement des coefficients des polynômes $f_m(x,y)$, $f_{m-1}(x,y)$ et $\varphi_p(x,y)$, $\varphi_{p-1}(x,y)$ [1].

Remarquons pour cela que le déterminant $R(x)$

[1] C'est à cause de cette démonstration différente de la démonstration plus générale de M. Fouret (3e série, t. IX, p. 258) que nous publions cet article, qui reproduit d'ailleurs les théorèmes énoncés par M. Fouret. CH. B.

peut être regardé comme la somme de déterminants partiels dont chacun se déduit du déterminant $R(x)$ en y remplaçant chaque colonne par l'une des files verticales qu'elle comprend. On vérifie d'ailleurs sans peine, par un procédé connu, que chacun de ces déterminants partiels est homogène par rapport à x, et l'on peut, par suite, évaluer facilement son degré.

Cela posé, considérons deux déterminants partiels Δ et Δ_1 qui ne diffèrent entre eux que par la $q^{\text{ième}}$ colonne, cette colonne étant formée dans Δ par la première file de la $q^{\text{ième}}$ colonne de $R(x)$, tandis qu'elle est formée dans Δ_1 par la file correspondante de rang $h+1$; il est manifeste que le degré en x de Δ_1 sera inférieur de h unités au degré en x de Δ, et sera, par suite, $mp-h$ au plus. Il en résulte donc que tous les déterminants partiels de $R(x)$ qui contiendront une ou plusieurs files occupant dans les colonnes correspondantes de ce déterminant un rang supérieur à deux seront de degré au plus égal à $mp-2$ en x; et, par suite, que le coefficient de x^{mp-1} dans l'équation $R(x)=0$ ne dépendra que des coefficients contenus dans les deux premières files verticales de chaque colonne de ce déterminant, c'est-à-dire uniquement des coefficients de $f_m(x, y)$, $f_{m-1}(x, y)$ et $\varphi_p(x, y)$, $\varphi_{p-1}(x, y)$.

Le théorème que nous avons en vue est la conséquence immédiate de cette remarque. Soit, en effet,

$$R(x) = \alpha_0 x^{mp} + \alpha_1 x^{mp-1} + \ldots = 0$$

l'équation qui donne les abscisses des points communs aux deux courbes C et C′, et soient (ξ, η) les coordonnées du centre des moyennes distances de ces points; nous aurons la formule

$$\xi = -\frac{\alpha_1}{mp\,\alpha_0},$$

si nous supposons toutefois $\alpha_0 \neq 0$, ce qui revient à admettre que les deux courbes n'ont pas de directions asymptotiques communes; et par suite ξ ne dépendra que des termes des degrés m et $m-1$ de $f(x, y)$ et des termes des degrés p et $p-1$ de $\varphi(x, y)$.

On démontrerait de même que l'ordonnée η ne dépend que de ces mêmes termes au moyen de l'équation $R_1(y) = 0$ obtenue en éliminant x entre les équations (1).

Ainsi le centre des moyennes distances des points communs aux deux courbes C et C' ne change pas quand ces courbes varient de telle sorte que les termes des degrés m, $m-1$ et p, $p-1$ de leurs équations restent les mêmes; en particulier, quand on remplace ces courbes par d'autres admettant les mêmes asymptotes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points d'intersection de deux courbes algébriques n'ayant pas de directions asymptotiques communes ne change pas quand on remplace ces courbes par d'autres admettant respectivement les mêmes asymptotes.

J'indiquerai, pour terminer, quelques applications de ce théorème à des cas particuliers.

1° Si l'une des courbes données est une conique à centre, on peut énoncer la proposition suivante :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque avec une conique de centre fixe ne change pas lorsque cette conique se déforme homothétiquement.

En particulier, si l'on considère un cercle de centre fixe et de rayon variable, on retrouve ainsi un théo-

rème démontré directement par M. M. d'Ocagne [1], et dont il a tiré d'intéressantes conséquences.

2° Si l'une des courbes données est une parabole, on est conduit au résultat suivant que nous avons précédemment signalé, et qui peut même être complété comme nous l'avons alors montré [2] :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque et d'une parabole ne change pas lorsque cette parabole glisse le long de son axe.

3° Enfin, si l'on considère une courbe *isotropique* dont l'équation soit réductible à la forme

$$(\gamma) \qquad (x^2 + y^2)^m + \varphi_{2m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une courbe algébrique quelconque et d'une courbe isotropique dont l'équation est réductible à la forme (γ) *ne change pas lorsque cette courbe tourne autour de l'origine.*

On peut citer comme application la lemniscate, et l'on voit ainsi que *le centre des moyennes distances reste le même pour toutes les lemniscates qui admettent le même centre.*

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, p. 295; 1886.

[2] *Voir* dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, 1893, la Note que nous avons publiée à ce sujet *Sur quelques propriétés de la parabole.*

SUR LES SURFACES RÉGLÉES QUI PASSENT PAR UNE COURBE;

PAR M. CH. BIOCHE.

Cette Note a pour objet de montrer comment on peut généraliser facilement diverses propriétés des développables qui passent par une courbe. Ces surfaces peuvent être définies comme des surfaces réglées qui ont, tout le long de la courbe directrice, une courbure totale nulle. On peut considérer des surfaces réglées dont la courbure, le long de la directrice, serait assujettie à d'autres conditions. Cette remarque a fait l'objet d'une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CX, p. 515); les résultats contenus dans la Note suivante ont été énoncés dans diverses séances de la Société mathématique.

1. *Formule fondamentale.* — Dans une Note insérée au Tome XVIII du *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai déduit du ds^2 des expressions du paramètre de distribution K d'une surface réglée passant par une courbe, et de la distance ρ comprise entre la courbe et la ligne de striction sur la génératrice. La courbure de la surface en un point situé sur la courbe directrice est donnée par

$$-\frac{K^2}{(1+K^2\rho^2)^2}.$$

En appliquant les formules que je viens de rappeler, on trouve pour expression de la courbure, que je désignerai par $-G^2$,

$$-G^2 = -\left(\pi + \omega \cot\theta \sin\varphi - \frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2,$$

ω et π étant les courbures de la courbe donnée, θ l'angle de la génératrice avec la courbe, φ l'angle du plan tangent à la surface avec le plan osculateur à la courbe, et σ l'arc de cette courbe.

2. Il résulte de là que, si l'on se donne ω, π, θ, G en fonction de σ, la détermination de φ dépend de l'une des équations de Riccati

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \omega \cot\theta \sin\varphi + \pi - G,$$

que l'on obtient en prenant pour G l'une des racines carrées de la valeur absolue de la courbure. Si $G = 0$, les deux équations se réduisent à une seule; en tout cas, l'équation correspondant à un système de fonctions ω, π, θ, G est la même que celle qui correspond au système ω, $\pi - G$, θ, 0. La détermination d'une surface passant par une courbe et ayant une courbure donnée le long de cette courbe, revient donc à celle d'une développable passant par une autre courbe.

3. *Normalies.* — J'appelle *normalies* d'une courbe les surfaces formées par des normales à cette courbe. Si deux normalies se coupent sous un angle constant, $\frac{d\varphi}{d\sigma}$ a la même valeur pour les deux surfaces; leurs courbures ont alors pour expression commune

$$-\left(\pi - \frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2.$$

Donc, *si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.* En particulier :

1° Si l'une est développable, l'autre l'est aussi : propriété classique;

2° Les normalies formées par des droites invariablement liées au trièdre de la courbe ont toutes pour courbure $-\pi^2$, sur la directrice. Si la directrice est plane, ces normalies donnent des hélicoïdes développables.

4. Si l'on considère deux normalies ayant même courbure, les angles φ_1 et φ_2 correspondant à ces surfaces sont donnés par

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \pi - G, \qquad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \pi - G,$$

ou par

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = \pi - G, \qquad \frac{d\varphi_2}{d\sigma} = \pi + G.$$

Dans le premier cas, on a

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{d\sigma} = 0,$$

dans le second

$$\frac{d\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}{d\sigma} = \pi.$$

Donc, *si deux normalies ont même courbure tout le long de la directrice, elles se coupent sous un angle constant,* ce qui est le cas des développables; *ou bien elles admettent comme bissectrices des normalies développables.*

5. *Surfaces qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes.* — Les surfaces correspondant à des valeurs constantes de φ_1 et ayant une courbure donnée le long de la directrice vérifient des équations

$$\pi + \omega \cot\theta \sin\varphi = \pm G.$$

Or les équations d'une génératrice définie par les angles θ et φ sont, par rapport au trièdre formé par la tan-

gente, la normale principale et la binormale,

$$\frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta\cos\varphi} = \frac{Z}{\sin\theta\sin\varphi};$$

donc cette droite est sur l'un des cônes

$$(\pi \mp G)(Y^2 + Z^2) + \omega ZX = 0.$$

Ces cônes ont tous deux pour plan principal le plan rectifiant, et les plans perpendiculaires aux génératrices principales donnent les sections circulaires. Si $G = \pm\pi$, l'un des cônes se décompose en deux plans : plan osculateur et plan normal. Si $G = 0$, les deux cônes se confondent en un seul, lieu des génératrices des développables correspondant à la condition $\varphi =$ const., cône qui a été déjà signalé dans divers travaux.

6. Un plan perpendiculaire à la tangente, mené à une distance d du point de la directrice, donne dans les deux cônes correspondant à une valeur donnée de la courbure des cercles de rayons

$$R_1 = \frac{\omega d}{2(\pi - G)}, \qquad R_2 = \frac{\omega d}{2(\pi + G)},$$

le cercle situé sur le cône correspondant à $G = 0$ a pour rayon

$$R_0 = \frac{\omega d}{2\pi};$$

on en déduit la relation

$$\frac{2}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

d'où l'on conclut que tout plan passant par la tangente coupe les cônes correspondant à une même valeur de G^2, et le cône correspondant à $G = 0$ suivant des droites qui forment avec la tangente un faisceau harmonique.

7. *Surfaces engendrées par les droites invariablement liées à la courbe.* — M. Appell a fait remarquer que, pour qu'une droite liée à une courbe engendre une développable autre que celle des tangentes, il faut que cette courbe soit une hélice, et que la droite soit sur le cône du second degré dont il a été question. Si l'on considère une surface ayant tout le long de la directrice une courbure constante, de valeur quelconque — G^2, on voit que les courbures de la directrice sont liées par une équation du premier degré,

$$\pi + \omega \cot\theta \sin\varphi = G,$$

c'est-à-dire, d'après un théorème bien connu, dû à M. Bertrand, que les normales principales de la courbe doivent être normales principales d'une seconde courbe. Les génératrices des surfaces considérées, qui passent par un point de la courbe, forment le cône

$$(\pi - G)(Y^2 + Z^2) + \omega ZX = 0,$$

qui est alors de grandeur constante.

8. Pour définir complètement ce cône, comme on sait que les génératrices principales sont perpendiculaires aux sections circulaires, il suffit de déterminer ces génératrices. L'une d'elles est la tangente; l'autre fait avec la tangente un angle θ défini par

$$\pi + \omega \cot\theta = G.$$

Si l'on identifie cette équation de condition avec celle qui lie les courbures ω et π à la longueur du segment de normale compris entre la directrice et la courbe qui a les mêmes normales principales et à l'angle des tangentes à ces courbes, on reconnaît facilement que la seconde génératrice est menée dans le plan rectifiant perpendiculairement à la binormale de la courbe conjuguée. On

peut aussi remarquer que cette seconde génératrice engendre une surface qui a pour ligne de striction la directrice et qui est applicable sur une surface gauche de révolution. Or j'ai déjà indiqué la construction précédente comme donnant une surface applicable sur une surface gauche de révolution, lorsque sa ligne de striction est donnée (voir *Leçons* de M. Darboux, t. III, p. 314).

9. *Observations relatives à une Note de M. Cesaro.* — Après la publication aux *Comptes rendus* de la Communication que je rappelle en commençant, M. Cesaro a fait insérer dans les *Nouvelles Annales*, 3e série, tome IX, page 294, une Note où il déclare qu'un article, paru l'année précédente dans le même Recueil (p. 445), contenait « sous une forme plus ou moins explicite les théories énoncées par M. Bioche ». Je crois devoir donner à ce propos quelques explications; si je ne l'ai pas fait plus tôt, c'est que je n'ai lu qu'il y a peu de jours la Note en question dans le Tome IX des *Nouvelles Annales*.

Dans ma Communication, j'avais énoncé un théorème sur les points centraux des droites liées à un trièdre. Ce théorème avait été établi antérieurement par M. Cesaro, et M. Mannheim a fait remarquer qu'il était un cas particulier d'une propriété plus générale (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IX, p. 127). Mais, à part cela, la réclamation de M. Cesaro me paraît peu justifiée. Dans sa Note du Tome IX, il démontre la formule fondamentale; mais il ne l'avait pas démontrée auparavant. Nous nous sommes servis tous deux des coordonnées qu'il appelle *intrinsèques,* qui ont été employées avant nous. C'était donc à chacun d'en tirer ce qu'il pouvait.

10. Voici, d'ailleurs, ce qui constitue, en somme, la

conclusion de M. Cesaro dans la Note que je discute : « De même l'observation de M. Bioche, relative au changement de π en $\pi - G$, est comprise parmi les *Remarques sur les surfaces gauches*. Quelques énoncés de cette Note contiennent, à vrai dire, des restrictions inutiles, dues au choix particulier de la courbe fondamentale; mais en ne rien supposant sur cette ligne, il est facile de restituer aux énoncés toute la généralité dont ils sont susceptibles, et l'on peut alors étudier fort aisément les lignes asymptotiques ($\varphi = 0$), les géodésiques ($\varphi = 90^\circ$), les lignes de courbure, etc., en attribuant à G successivement les formes

$$\pi, \quad \pi + \omega \cot\theta, \quad \omega \cot\theta \sin\varphi. \text{ »}$$

11. Pour répondre à la première phrase de cette citation, je copie le passage auquel elle fait allusion, en changeant seulement une notation : « On en (de ces formules) trouve sans peine une interprétation géométrique en observant que, si l'on diminue de G la torsion de (M) (la directrice), elles coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction considérée soit invariable dans l'espace » (p. 446). Je ne reconnais pas bien ma remarque là dedans, d'autant plus qu'il s'agit alors seulement du cas où la courbe considérée est ligne de striction. D'ailleurs, pour donner une idée des restrictions que M. Cesaro reconnaît être inutiles et qu'il aurait mieux fait, par suite, de supprimer, je ferai encore quelques citations.

12. « Lors donc que la ligne de striction est ligne de courbure de la surface, la courbure de celle-ci, le long de la ligne en question, est mesurée en valeur absolue, par le carré du paramètre de distribution des plans tangents » (p. 448). Or, il est bien connu que

cette propriété est caractéristique de toute ligne de striction.

« Remarquons enfin que toute ligne de striction et de courbure ne saurait être géodésique sans être plane » (p. 449). Or il est également bien connu que toute ligne de courbure qui est géodésique est plane.

Je ne voudrais pas être trop long. Je m'arrête donc là. Je crois en avoir dit assez pour montrer que, même eussé-je lu le premier article de M. Cesaro, avant de faire la Communication dont il parle dans le second, j'étais en droit de faire cette Communication ; les restrictions de M. Cesaro masquant complètement la généralité dont ses énoncés étaient susceptibles.

SUR UNE SÉRIE FONCTIONNELLE;

Par M. V. JAMET.

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable, réelle ou non, assujettie à la condition d'être finie et continue quand x varie dans une certaine région comprenant le point x_0; de telle sorte que, dans cette région, le module de $F(x)$ ne s'élève pas au-dessus d'un nombre constant M. Considérons la fonction u_n définie comme il suit :

$$u_n = \int_{x_0}^{x} (x - z_1)\,F(z_1)\,dz_1 \int_{x_0}^{z_1} (z_1 - z_2)\,F(z_2)\,dz_2 \ldots$$

$$\times \int_{x_0}^{z_{n-1}} (z_{n-1} - z_n)\,F(z_n)[a + b(z_n - x_0)\,dz_n.$$

Soit μ le maximum du module de $a + b(x - x_0)$ dans la région considérée (a et b désignent des constantes). Le module de u_n est évidemment inférieur à

$$\mu M^n \,|x - x_0|^{2n}.$$

La dérivée de u_n par rapport à x s'obtient en remplaçant la fonction qui figure sous le premier signe $\int$ par $F(z_1)\,dz_1$; de sorte que son module est inférieur à

$$\mu M^n \,|\, x - x_0 \,|^{2n-1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu}{x - x_0} M^n \,|\, x - x_0 \,|^{2n};$$

et la dérivée seconde de u_n, par rapport à x, est égale à

$$u_{n-1}\,F(x).$$

Si donc le point x est intérieur à un cercle tracé du point x_0 comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{\sqrt{M}}$, les séries

$$[a + b(x - x_0)] + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$b + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2u_n}{dx^2} + \ldots$$

seront convergentes, et chacune des deux dernières sera la dérivée de la somme de la précédente. Soit y la somme de la première. A l'intérieur du cercle que nous venons de définir, la fonction y aura une dérivée première et une dérivée seconde. D'ailleurs, nous avons établi la relation

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} = F(x).u_{n-1},$$

d'où l'on conclura la suivante :

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{d^2u_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2u_n}{dx^2} = F(x)$$
$$\times [a + b(x - x_0) + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + \ldots],$$

ou bien

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x).y. \tag{1}$$

La fonction y que nous avons formée est donc une inté-

grale de l'équation (1), égale à a, pour $x = x_0$, et dont la dérivée première se réduit à b, pour cette même valeur de x.

Pour abréger, nous avons exposé ce résultat sous forme synthétique; mais le lecteur familier avec la théorie des équations différentielles comprendra aisément que l'analyse qui nous y a conduit nous a été suggérée par la lecture du Mémoire de M. Picard sur la théorie des équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. VI).

SUR LE DISCRIMINANT DES FORMES CUBIQUES TERNAIRES;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

J'ai montré récemment (1) que l'on peut inscrire dans une cubique plane trois triangles ayant leurs côtés parallèles aux asymptotes de la courbe, et que si

$$xyz + Ax + By + Cz = 0$$

est l'équation trilinéaire de la cubique rapportée aux asymptotes, et

$$ax + by + cz = 2h$$

la relation constante qui lie les variables x, y, z, les côtés de chacun de ces triangles ont pour équations

$$(1)\qquad x = \frac{hS'}{aS' - A}, \qquad y = \frac{hS'}{bS' - B}, \qquad z = \frac{hS'}{cS' - C},$$

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, n° 3.

S' désignant chaque racine de l'équation

$$(2) \qquad (aS - A)(bS - B)(cS - C) = h^2 S^2.$$

Relativement à ces trois droites, la cubique serait représentée par l'équation

$$(3) \qquad \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\mu}{y_1} + \frac{\nu}{z_1} + 1 = 0,$$

en appelant λ, μ, ν les seconds membres des formules (1). Rapportée à tout autre triangle que ceux-ci, la courbe a une équation qui n'est pas de la forme (3).

Si l'on cherche la condition pour que les droites qui sont définies par les formules (1) passent par un même point, on trouve que S' doit vérifier la dérivée de l'équation (2), c'est-à-dire être une racine double de cette équation. Or voici des conséquences de cette remarque.

Supposons que deux des trois systèmes de trois droites que je viens de définir soient confondus en un seul, ce qui revient à admettre que l'équation (2) a une racine double, S'. Les trois droites de ce système double, étant représentées par les formules (1), devront passer par un même point M : l'équation (3) de la courbe, supposée rapportée à ces trois droites, fait voir que le point M sera un point double de la courbe.

Réciproquement, admettons que la cubique ait un point double, et soient d_1, d_2, d_3 les directions asymptotiques tracées par ce point. L'équation de la courbe, rapportée à ces trois droites, devra avoir, d'une manière évidente, la forme (3) : donc ces droites pourront être représentées par les relations (1), S' étant une racine convenable de l'équation (2), et, puisqu'elles sont concourantes, il faudra que S' soit racine double de cette équation. Des trois systèmes de droites précédemment

considérés, deux seront confondus avec le système (d_1, d_2, d_3).

La conclusion de ce qui précède est celle-ci :

Pour que la cubique ait un point double, il faut et il suffit que deux des trois triangles inscrits qui ont leurs côtés parallèles aux asymptotes se réduisent à un seul. Ce triangle double est lui-même réduit à un point, et ce point est le point double.

Je suis conduit, par une voie toute naturelle, à la méthode qui suit pour exprimer qu'une cubique, rapportée à un triangle de référence quelconque, admet un point double.

Les relations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ étant supposées représenter les trois asymptotes par rapport à ce triangle, on identifie l'équation de la cubique avec la formule

$$\frac{\lambda}{X - \lambda} + \frac{\mu}{Y - \mu} + \frac{\nu}{Z - \nu} + 1 = 0,$$

et l'on exprime que les trois équations en λ, μ, ν obtenues de la sorte ont deux de leurs trois solutions (λ, μ, ν) confondues en une seule $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

Ces trois équations sont linéaires par rapport aux quatre quantités $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$, $\lambda\mu\nu$, et, par conséquent, leur résolution pourra se ramener à celle d'une équation du troisième degré, dont la formation est immédiate. Le discriminant de cette équation, égalé à zéro, fournirait la condition cherchée $\Delta = 0$ [1].

Si l'on ne connaît pas les équations mêmes des asymptotes de la cubique, la théorie des fonctions symétriques

---

[1] Le point double serait déterminé par l'intersection des deux droites $X = \lambda_1$, $Y = \mu_1$.

permettra de calculer l'expression de Δ en fonction des données. Ainsi, en partant de cette forme de l'équation générale d'une cubique

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

où, après réduction du coefficient de y^3 à l'unité, φ_3 et φ_2 représentent les termes du troisième et du deuxième degré, si l'on désigne par u_1, u_2, u_3 les trois racines de l'équation $\varphi_3(1, u) = 0$ et si l'on pose

$$f(u) = -\frac{\varphi_2(1, u)}{\varphi'_3(1, u)},$$

on trouve que la condition du point double s'obtient en annulant le discriminant de l'équation du troisième degré

$$[(u_1 - u_2)S + L][(u_2 - u_3)S + M] \times [(u_3 - u_1)S + N] - \tfrac{1}{4}D^3 S^3 = 0,$$

dans laquelle on a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ 1 & u_3 & f(u_3) \end{vmatrix},$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ -\beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix} + f(u_1)f(u_2) \begin{vmatrix} 1 & u_1 & f(u_1) \\ 1 & u_2 & f(u_2) \\ 1 & u_3 & -f(u_3) \end{vmatrix},$$

et où M, N ont les valeurs qui se déduisent de celle de L par une permutation circulaire des indices 1, 2, 3. Les coefficients de cette équation, rapportés à celui de S^3, sont des fonctions symétriques rationnelles de u_1, u_2, u_3, et l'on sait les exprimer au moyen des coefficients de φ_3 et de φ_2.

Cette méthode constitue donc un procédé particulier pour calculer le discriminant d'une forme cubique à trois variables.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DONNÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892;

Par M. GENTY, à Oran.

Les droites qui coupent harmoniquement deux coniques (S) et (S′) enveloppent une troisième conique (Σ) inscrite dans les deux quadrilatères formés par les tangentes aux deux coniques données en leurs points d'intersection.

Soit (L) une tangente de la conique (Σ) et supposons que le pôle P de l'une des cordes communes de (S) et de (S′) par rapport à (S) soit situé sur (L). On voit que du point P on peut mener trois tangentes à la conique (Σ), savoir : la droite (L) et les deux tangentes à (S) qui passent par ce point. Donc, dans ce cas, la conique (Σ) se réduit à un système de deux points, dont le point P fait partie, et ce point est évidemment aussi le pôle de la seconde corde commune des coniques données par rapport à (S′).

Or, c'est ce qui se présente dans le problème proposé. La droite de l'infini coupe harmoniquement le cercle et l'hyperbole équilatère et le pôle P de la corde commune DD′ par rapport au cercle est situé à l'infini, dans une direction perpendiculaire à cette corde.

Le pôle de la seconde corde commune HH′ par rapport à l'hyperbole se confond avec ce même point P. Donc cette seconde corde commune est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction perpendiculaire à DD′ :

1° Toutes les droites perpendiculaires à DD′ passant

par le point P, elles coupent harmoniquement le cercle et l'hyperbole;

2° Pour que les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole soient tous réels, il faut, évidemment, que la parallèle à DD', menée par le centre, fasse avec l'axe transverse de l'hyperbole un angle plus petit que 45°;

3° Il est clair que la droite HH' appartient au lieu cherché, lequel comprend, en outre, le lieu du point d'intersection des droites DH et D'H'. Or ces droites décrivent deux faisceaux homographiques ayant pour base les points H et H' : donc le lieu est une conique (C) qui passe en ces deux points. Les tangentes en ces deux points sont évidemment parallèles et l'on reconnaît de suite que la conique (C) a deux points à l'infini dans la direction des axes de l'hyperbole donnée : c'est donc une hyperbole équilatère ayant ses axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole donnée et concentrique avec cette hyperbole.

4° Si l'on transforme homographiquement la figure, dans l'une des positions de la droite DD', de telle sorte que les points D et D' deviennent les points imaginaires d'un cercle à l'infini, le cercle et l'hyperbole se transforment en deux cercles orthogonaux, et, si l'on fait la construction indiquée, on voit que la droite AB passe par le point fixe H'.

CORRESPONDANCE.

M. Audibert et M. Farjon signalent une erreur dans la solution du problème du concours d'admission à

l'École Normale supérieure en 1892, publiée dans le numéro de novembre 1892 des *Nouvelles Annales*.

Au second paragraphe, il est dit que, par un point $M(\alpha, \beta)$ du plan, il passera deux coniques de l'espèce A, si l'on a

$$4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha + 1)(3\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 3) > 0.$$

Ce calcul est bien exact, mais le premier membre de cette inégalité est identiquement égal à

$$[3(\alpha + 1)^2 - \beta^2](\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha - 1),$$

et représente le groupe des deux droites $\beta = \pm\sqrt{3}(\alpha + 1)$ et le cercle C.

M. J. Réveille nous écrit à propos de la solution de la question 1534 par M. Barisien :

« L'auteur fait justement remarquer (p. 22*) que l'on a

$$OK = (\lambda + 1)a;$$

mais il en conclut que le lieu du point K est un cercle.

» Or il est facile de voir que le point K est fixe sur l'axe Ox.

» En effet, les intersections des deux cordes de contact avec l'axe Ox sont respectivement données par les relations $x = \frac{p}{\cos\alpha}$ et $x = \frac{q}{\sin\alpha}$; et il résulte des relations (3) et (7) que l'on a

$$\frac{p}{\cos\alpha} = \frac{q}{\sin\alpha} = a(\lambda + 1) = \text{const.}$$

» C'est ce que l'on peut voir d'ailleurs en remarquant que les cordes de contact d'une conique variable doublement tangente à deux coniques fixes passent par des sommets du triangle autopolaire commun aux deux co-

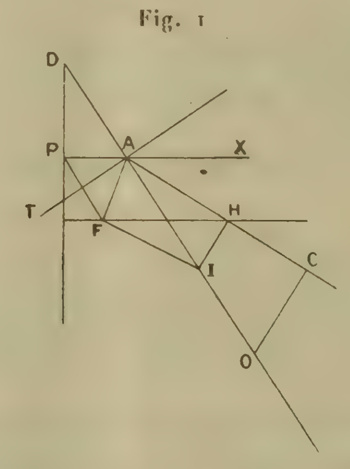
niques. Le point K est donc ici l'un des points limites du faisceau de cercles auquel appartiennent les cercles O et C. »

NOTE SUR LA PARABOLE;

Par M. S. MAILLARD,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Construire une parabole connaissant un point A, *le diamètre* AX *et le centre* O *du cercle osculateur en* A (*fig*. 1).

Fig. 1



Soit I le milieu de OA; le point D, symétrique de I par rapport à A, se trouve sur la directrice DP perpendiculaire sur AX, et le foyer F est symétrique de P par rapport à la tangente AT perpendiculaire sur OA.

On sait, en effet, que : *Le rayon de courbure de la parabole est double de la normale terminée à la directrice*. Parmi les applications classiques du calcul intégral (*voir* Frenet), figure cette question : Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure égale

n fois la normale. Pour $n = -2$, la courbe est une parabole. Nous n'insisterons que sur ce cas particulier, en nous servant de considérations tout à fait élémentaires.

Les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique. La tangente en A et la corde AB commune à la parabole et au cercle osculateur font avec l'axe des angles égaux; AB est donc parallèle à la tangente en A_1, symétrique de A par rapport à l'axe; le milieu C de AB est sur le diamètre du point A_1 et la droite CO est perpendiculaire sur AB. Le milieu H de AC se trouve sur l'axe, et, si la droite HI est perpendiculaire sur AC, le point I est le milieu du rayon AO. Or l'angle FHI, formé par l'axe et la droite HI, égale l'angle de la directrice et de AC, ou encore l'angle de la directrice et de AT, ou encore l'angle de l'axe et de la normale, ou enfin l'angle du rayon vecteur et de la normale; c'est-à-dire FHI = FAI. Les quatre points F, A, H, I sont sur un cercle, dont le diamètre est AI; l'angle AFI est droit. Mais les triangles AFI, APD sont égaux : *donc* AI, *moitié du rayon de courbure, égale* AD, *normale terminée à la directrice*.

Autrement. — L'angle du rayon vecteur avec l'axe est double de l'angle de la normale avec l'axe. Si ce dernier augmente de α, le premier augmente de 2α; donc l'angle de deux rayons vecteurs FA, FA′ est double de l'angle A′O′A des deux normales correspondantes. Soit I′ le centre du cercle circonscrit au triangle A′O′A, l'angle au centre A′I′A égale A′FA, et les quatre points A, A′, I′, F sont sur une circonférence. Si les deux points A′ et A se correspondent en A, cette circonférence a pour diamètre AI moitié de AO : donc l'angle AFI est droit, etc., comme plus haut.

Le théorème énoncé par M. Rouché, question 1653, est une conséquence immédiate de ce qui précède.

SUR LA STROPHOÏDE ET LA CISSOÏDE;

Par M. BALITRAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

La strophoïde oblique est une cubique caractérisée par les propriétés de passer par les points circulaires de l'infini et de posséder un nœud à tangentes rectangulaires. Si nous prenons comme axes coordonnés les tangentes au point double, l'équation de la strophoïde est

$$(1) \qquad (y+cx)(x^2+y^2)-axy=0.$$

L'asymptote réelle de la courbe a pour coefficient angulaire $-c$. La droite qui a pour équation

$$y-cx=0$$

rencontre la strophoïde en un point S tel que $OS=\frac{a}{2}$. Nous dirons que cette droite OS est l'axe de la strophoïde, quoique ce ne soit pas un axe au sens géométrique du mot, et nous désignerons la parallèle à l'asymptote menée par le point double sous le nom de *droite* Δ.

En posant $y=tx$, on arrive à exprimer les coordonnées d'un point de la courbe au moyen des formules

$$(2) \qquad x=\frac{at}{(c+t)(1+t^2)}, \qquad y=\frac{at^2}{(c+t)(1+t^2)}.$$

L'équation de la droite qui joint les deux points (t_1),

(t_2) est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ at_1 & at_1^2 & c + t_1 + ct_1^2 + t_1^3 \\ at_2 & at_2^2 & c + t_2 + ct_2^2 + t_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant se met sous la forme suivante, après avoir divisé par $t_1 - t_2$,

$$(3) \quad \begin{cases} [c(t_1 + t_2) + t_1 t_2 - t_1^2 t_2^2]x \\ \quad + [-c + ct_1 t_2 + t_1 t_2(t_1 + t_2)]y - at_1 t_2 = 0; \end{cases}$$

l'équation de la tangente au point (t), qui s'obtient en faisant $t_1 = t_2$ dans l'équation précédente, est donc

$$(4) \quad (2ct + t^2 - t^4)x + (-c + ct^2 + 2t^3)y - at^2 = 0.$$

Si nous considérons un cercle quelconque du plan dont l'équation soit

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

l'équation qui donne les valeurs du paramètre t pour les points d'intersection du cercle et de la strophoïde est

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma t^4 + 2(\gamma c - a\beta)t^3 \\ \quad + (\gamma + \gamma c + a^2 - 2a\alpha - 2ac\beta)t^2 \\ \qquad\qquad - 2c(\gamma - a\alpha)t + \gamma c = 0. \end{cases}$$

Entre ces paramètres existe la relation

$$(7) \qquad t_1 t_2 t_3 t_4 = c.$$

De même l'équation qui donne les valeurs du paramètre t pour les points d'intersection de la strophoïde et de la droite représentée par l'équation

$$(8) \qquad ux + vy - 1 = 0$$

est

$$(9) \qquad t^3 + (c - av)t^2 + (1 - au)t + c = 0$$

et l'on a encore la relation

$$(10) \qquad t_1 t_2 t_3 = -c.$$

D'un point γ pris sur la strophoïde, on peut mener deux tangentes γB, γC à cette courbe; les paramètres des points de contact sont donnés par la relation

$$t_1 \theta^2 = -c;$$

ils sont égaux, mais de signes contraires; de sorte que les droites OB, OC sont symétriques par rapport à Ox; c'est-à-dire qu'elles forment un faisceau harmonique avec les tangentes au point double. Réciproquement, deux droites OB et OC, symétriques par rapport à Ox, rencontrent la strophoïde en deux points tels que les tangentes en ces points se coupent en un point γ de la strophoïde. On peut encore observer que les points B et C sont équidistants de la droite Δ; nous dirons que les points B et C sont conjugués.

Le point double est le centre du cercle inscrit au triangle γBC; c'est-à-dire que Oγ est la bissectrice de l'angle BγC (*Journal de Math. spéc.*, 1887, p. 269).

Prenons quatre points de la strophoïde A, B, C, D, situés sur un cercle, points que nous appellerons *concycliques*, et soient t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre t pour ces points. La droite AB rencontre la strophoïde en un troisième point P(θ_1) et la droite CD en un troisième point Q(θ_2). Les relations (7) et (10) donnent

$$t_1 t_2 \theta_1 = -c, \qquad t_3 t_4 \theta_2 = -c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 = c.$$

Or, si nous adjoignons à ces deux points le point $(\theta_3) = -1$, on a

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = -c,$$

c'est-à-dire que ces trois points sont en ligne droite; et l'on vérifie aisément, au moyen de la formule (4), que le point $(\theta_3) = -1$ est celui où la tangente à la strophoïde est parallèle à l'asymptote de cette courbe. Ce point est également sur la seconde bissectrice des axes. On a donc ce théorème :

Théorème. — *Si quatre points* A, B, C, D *d'une strophoïde sont sur un cercle, les droites* AB *et* CD *rencontrent la strophoïde en deux points* P *et* Q *en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote, ou encore avec le point situé sur la seconde bissectrice des axes.*

Ce théorème peut servir pour l'étude des groupes de points concycliques sur la strophoïde, mais les formules (7) et (10) sont aussi commodes et permettent en outre de faire la distinction du réel et de l'imaginaire. Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Si autour de deux points fixes P *et* Q, *pris sur la strophoïde, et en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote, on fait pivoter deux droites* PAB, QCD, *les quatre points* A, B, C, D *sont constamment sur un cercle.*

Supposons que le cercle varie en passant par les deux points fixes A et B, la droite CO pivotera autour du point fixe Q. Puisque du point Q on peut mener deux tangentes à la strophoïde, il y a deux positions du cercle pour lesquelles il devient tangent à la strophoïde; les deux points de contact sont conjugués, c'est-à-dire équidistants de la droite Δ.

Théorème. — *Par deux points fixes pris sur la*

strophoïde, on peut faire passer deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont deux points conjugués.

Supposons maintenant que, le point A restant fixe, le point B se déplace sur la strophoïde. A chaque position du point B, correspondent deux points de contact; donc, en vertu du principe de correspondance, il y a trois positions pour lesquelles le point B se confond avec l'un des points de contact, c'est-à-dire trois positions pour lesquelles le cercle tangent devient osculateur à la strophoïde. La formule (7) nous montre de plus qu'un de ces cercles est réel, les deux autres étant imaginaires; elle nous montre aussi que le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Par un point pris sur la strophoïde, on peut faire passer trois cercles osculateurs à cette courbe. Un cercle est réel, les deux autres sont imaginaires; le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle.*

Le cercle osculateur en un point M à la strophoïde coupe cette courbe en un autre point μ, et la détermination du cercle osculateur revient évidemment à celle du point μ.

Or, si nous considérons la tangente au point M, elle coupe la strophoïde en un autre point, et d'après notre premier théorème, ce point et le point où la ligne $M\mu$ rencontre la strophoïde sont en ligne droite avec le point où la tangente est parallèle à l'asymptote. Par conséquent la détermination du point μ, c'est-à-dire celle du cercle osculateur, revient au problème suivant ou à des cas particuliers du problème suivant :

Connaissant deux des points d'intersection A *et* B *d'une droite et de la strophoïde, trouver le troisième point* C.

La solution de ce problème résulte de la formule qui lie les paramètres de trois points en ligne droite

$$t_1 t_2 t_3 = -c,$$

formule dans laquelle c désigne le coefficient angulaire de l'axe de la strophoïde, t_1 et t_2 les coefficients angulaires des droites qui joignent le point double aux points d'intersection connus et t_3 le coefficient angulaire de la droite qui va au point d'intersection cherché C.

La relation $t_1 t_2 t_3 = -c$ pouvant s'écrire

$$t_1 t_2 = cx$$

en posant $-\frac{1}{t_3} = x$ conduit à la construction suivante qu'il suffit d'énoncer :

D'un point P *pris arbitrairement sur* Ox, *élever à* Ox *une perpendiculaire qui coupe* OA, OB *et l'axe de la strophoïde en* A′, B′, D′. *Rabattre* PD′, PB′ *sur* Ox, *en* α' *et* β', *joindre* A′α' *et par* β' *mener une parallèle à* A′α' *qui coupe* PA′B′ *en* C′. *La perpendiculaire à* OC′ *passe par le point cherché* C.

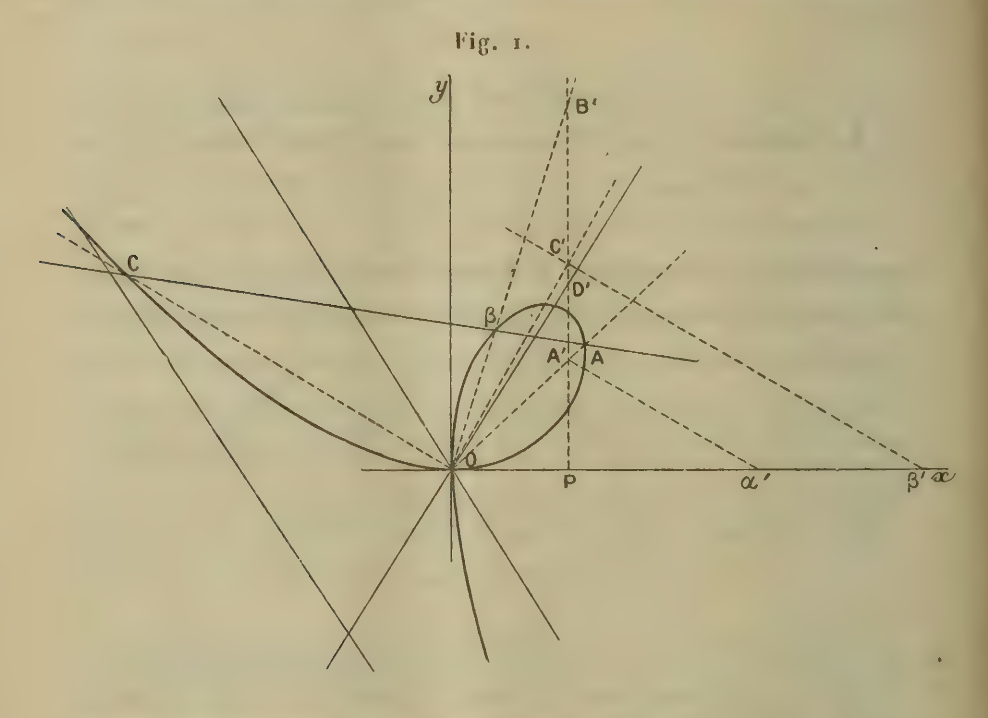
Les relations (7) et (10) conduisent à une foule de théorèmes sur la strophoïde; mais, comme leur énoncé et leur démonstration ne présentent aucune difficulté, nous nous bornerons à démontrer les plus simples.

Si l'on prend quatre points concycliques sur la strophoïde, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = c,$$

on voit que les cercles osculateurs en ces points coupent la strophoïde en quatre nouveaux points, dont les

Fig. 1.



paramètres sont donnés par les relations

$$t_1^3 \theta_1 = c, \qquad t_2^3 \theta_2 = c, \qquad t_3^3 \theta_3 = c, \qquad t_4^3 \theta_4 = c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = c.$$

Par suite

Théorème. — *Les cercles osculateurs en quatre points concycliques coupent la strophoïde en quatre nouveaux points également concycliques.*

Si l'on prend sur la strophoïde quatre points concycliques, on a

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = c.$$

Si par les points (t_1) et (t_2) on fait passer un cercle qui coupe la courbe aux points (θ_1) et (θ_2) et par les points (t_3) et (t_4) un autre cercle qui la coupe aux

points (θ_3) et (θ_4), on a

$$t_1 t_2 \theta_1 \theta_2 = c, \qquad t_3 t_4 \theta_3 \theta_4 = c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = c.$$

Ainsi :

Théorème. — *Si l'on coupe une strophoïde par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la strophoïde en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Penons trois points (t_1), (t_2), (t_3) sur une droite. Les cercles osculateurs en ces points coupent la strophoïde en trois nouveaux points tels que l'on a

$$t_1^2 \theta_1 = c, \qquad t_2^2 \theta_2 = c, \qquad t_3^2 \theta_3 = c;$$

d'où

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = c.$$

Or nous savons que les deux points (θ) et $(-\theta)$ sont deux points conjugués. La relation précédente pouvant s'écrire

$$\theta_1 \theta_2 (-\theta_3) = -c,$$

on a ce théorème :

Théorème. — *Les cercles osculateurs à la strophoïde en trois points en ligne droite coupent cette courbe en trois nouveaux points tels que deux quelconques de ces points et le conjugué du troisième sont en ligne droite.*

Ce théorème est analogue au théorème classique sur les tangentiels de trois points en ligne droite que l'on peut encore rapprocher du théorème suivant :

Théorème. — *Les tangentes à la strophoïde en*

quatre points situés sur un cercle, coupent la courbe en quatre nouveaux points également situés sur un cercle.

Nous venons de rencontrer le groupe de points défini par la relation

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = c$$

et d'en donner une définition géométrique au moyen des cercles osculateurs à la strophoïde en trois points en ligne droite. On peut en donner une définition géométrique différente et un peu plus simple. En effet, si nous leur adjoignons le point $(\theta_4) = 1$, qui correspond évidemment au point situé sur la première bissectrice, les quatre points (θ_1), (θ_2), (θ_3), (θ_4) sont sur un cercle. Nous appellerons le point $(\theta_4) = 1$ le sommet de la strophoïde, quoique ce ne soit pas un sommet géométrique; et nous pourrons alors énoncer le théorème suivant, qui ne diffère que par la forme de notre avant-dernier théorème :

Théorème. — *Un cercle passant par le sommet de la strophoïde coupe cette courbe en trois autres points* A, B, C, *tels que deux quelconques de ces points,* A *et* B *par exemple et le conjugué* γ *du troisième* C, *sont en ligne droite.*

La réciproque de ce théorème est vraie. On peut ajouter :

Les trois points α, β, γ *sont en ligne droite.*

Réciproquement, *si trois points sont en ligne droite, leurs conjugués forment un triangle tel que le cercle circonscrit à ce triangle passe par le sommet de la strophoïde.*

Ce résultat peut encore s'énoncer :

Théorème. — *Un cercle passant par le sommet de la strophoïde détermine par ses intersections avec cette courbe un triangle* ABC, *tel que les côtés* BC, CA, AB *prolongés coupent cette courbe en trois points* α, β, γ *en ligne droite. Les points* A *et* α, B *et* β, C *et* γ *sont conjugués.*

Les points A, B, C, α, β, γ forment un quadrilatère complet inscrit dans la strophoïde, que nous appellerons *quadrilatère conjugué inscrit,* puisque chaque sommet est le conjugué du sommet qui lui est opposé. La première question qui se présente est de savoir si tout quadrilatère complet inscrit dans la strophoïde est conjugué. Pour le voir prenons sur la strophoïde trois points $\alpha(t_1)$, $\beta(t_2)$, $\gamma(t_3)$ en ligne droite et construisons un quadrilatère complet inscrit. Par le point α menons une droite αBC, qui coupe la strophoïde aux points $B(\theta_2)$ et $C(\theta_3)$ et joignons βC qui coupe la strophoïde au point $A(\theta_1)$; enfin les points A et B étant supposés en ligne droite avec γ, tirons γAB. On a

$$t_1 t_2 t_3 = -c,$$

puis

$$t_1 \theta_2 \theta_3 = -c, \qquad t_2 \theta_3 \theta_1 = -c, \qquad t_3 \theta_1 \theta_2 = -c;$$

d'où

$$\theta_1^2 \theta_2^2 \theta_3^2 = c^2,$$

par suite

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3 = \pm c.$$

En prenant le signe —, on a évidemment les tangentiels des trois points α, β, γ en ligne droite qui forment un quadrilatère conjugué inscrit dégénéré, puisque les six points sont sur deux droites. En prenant le signe +, on a trois points qui forment avec α, β, γ un

quadrilatère conjugué inscrit véritable. On a donc ce théorème :

Théorème. — *Tout quadrilatère complet inscrit à la strophoïde est un quadrilatère conjugué inscrit, soit dégénéré, soit véritable.*

Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ont pour équations

$$(11)\qquad t_1^2(1+t_1^2)x + c(1+t_1^2)y + t_1^2 = 0,$$
$$(12)\qquad t_2^2(1+t_2^2)x + c(1+t_2^2)y + t_2^2 = 0,$$
$$(13)\qquad t_3^2(1+t_3^2)x + c(1+t_3^2)y + t_3^2 = 0,$$

et les paramètres t_1, t_2, t_3 sont liés par la relation

$$t_1 t_2 t_3 = c.$$

La droite $A\alpha$ rencontre la strophoïde en un troisième point a dont le paramètre est donné par la formule

$$\theta_1 = \frac{c}{t_1^2},$$

et le coefficient angulaire de la droite $A\alpha$ est précisément $-\frac{t_1^2}{c}$, de sorte que les droites $O\alpha$ et $A\alpha$ sont rectangulaires. Il en est de même pour les droites Ob et $B\beta$, Oc et $C\gamma$.

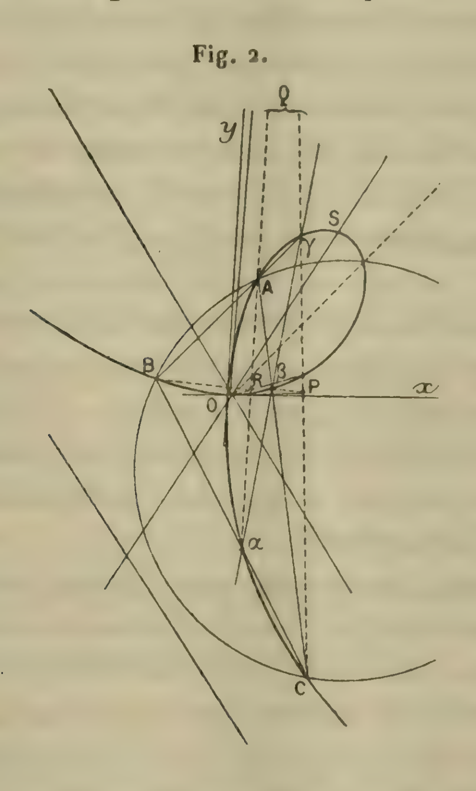
Au moyen des équations (12) et (13) on arrive facilement à trouver l'équation de la droite qui va du point double au point de rencontre des droites $B\beta$ et $C\gamma$; on trouve précisément

$$y - \frac{c}{t_1^2}x = 0,$$

c'est la droite Oa. Ainsi les droites Oa, Ob, Oc sont les hauteurs du triangle des diagonales PQR du quadrilatère complet. De ce qui précède résulte la construction de la strophoïde circonscrite à un quadrilatère complet.

En général, il n'est pas possible de circonscrire une strophoïde à un quadrilatère complet et nous trouverons plus loin la condition que doivent vérifier les six sommets ou plutôt les quatre côtés du quadrilatère pour que cela soit possible. Mais on peut toujours, par les six sommets, faire passer une cubique circulaire uni-

Fig. 2.



cursale, puisque cette cubique qui satisfait déjà à trois conditions linéaires, savoir de passer par les points cycliques et de présenter un point double, est déterminée linéairement par les six sommets du quadrilatère. Si le quadrilatère est choisi de telle façon que cette cubique soit une strophoïde, sa détermination est immédiate. En effet, le centre des hauteurs du triangle des diagonales est le point double de la strophoïde. La droite qui joint les milieux des diagonales ou médiane du quadrilatère, est parallèle à l'asymptote. Les cercles circonscrits aux

triangles formés en prenant trois par trois les côtés du quadrilatère passent par un même point. C'est le point que nous avons appelé le sommet de la strophoïde et l'asymptote de la courbe passe par le point symétrique du sommet par rapport à la droite qui joint les milieux des diagonales. La strophoïde est complètement déterminée.

On peut remarquer que le sommet de la strophoïde est le foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

Si nous considérons le quadrilatère complet A, B, C, α, β, γ et le faisceau des coniques tangentes à ces quatre côtés et si du point double de la strophoïde nous menons des tangentes à ces coniques, le lieu des points de contact est, comme on le sait, une cubique présentant un point double au point fixe par où l'on mène les tangentes. Cette cubique passe par les six sommets du quadrilatère complet et par les points où les droites qui joignent le point fixe aux sommets du triangle des diagonales coupent ces diagonales. Cette cubique coïncide donc avec la strophoïde.

Considérons encore un quadrilatère quelconque et cherchons la courbe, lieu des foyers des coniques tangentes aux quatre côtés du quadrilatère. On sait que c'est une cubique passant par les points circulaires de l'infini, par les six sommets du quadrilatère et par les pieds des hauteurs du triangle des diagonales. L'asymptote réelle est parallèle à la médiane du quadrilatère, et l'on voit aisément qu'elle passe par le point symétrique, par rapport à la médiane du quadrilatère, du foyer de la parabole tangente aux quatre côtés. Lorsque le quadrilatère est circonscriptible à un cercle, cette courbe présente un point double à tangentes rectangulaires au centre du cercle. C'est une strophoïde (Picquet, *Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, p. 123).

Ce qui précède peut se résumer ainsi :

Théorème. — *Pour qu'un quadrilatère soit inscriptible dans une strophoïde, il faut et il suffit que les quatre côtés du quadrilatère touchent un cercle.*

Le centre du cercle est le point double de la strophoïde, l'asymptote est parallèle à la médiane du quadrilatère et passe par le symétrique, par rapport à cette médiane, du foyer de la parabole tangente aux quatre droites. Le sommet de la strophoïde est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles obtenus en associant trois par trois les côtés du quadrilatère.

Les sommets opposés du quadrilatère sont conjugués, c'est-à-dire que les tangentes en ces points se coupent sur la strophoïde.

La strophoïde passe par les pieds des hauteurs du triangle des diagonales.

Elle peut être engendrée en menant par le centre du cercle des tangentes aux coniques qui touchent les quatre côtés du quadrilatère. Elle peut aussi être considérée comme le lieu des foyers des mêmes coniques.

Nous avons rencontré précédemment les points que nous avons appelés *conjugués* et nous en avons donné quelques propriétés. Ils jouissent d'un grand nombre d'autres propriétés; nous nous contenterons d'énoncer les plus simples.

Les cercles osculateurs en deux points conjugués (t_1) et $(-t_1)$ rencontrent la strophoïde en deux nouveaux points donnés par les relations

$$t_1^3\theta_1 = c, \qquad -t_1^3\theta_2 = c,$$

c'est-à-dire que les points (θ_1) et (θ_2) sont conjugués.

Le cercle tangent en t_1 à la strophoïde et passant par le point conjugué rencontre la strophoïde en un point défini par la relation

$$-t_1^3\theta_2 = c,$$

c'est-à-dire au point où le cercle osculateur à la courbe en $(-t_1)$ la rencontre de nouveau. De même, le cercle tangent en $(-t_1)$ et passant en t_1 coupe la strophoïde au point (θ_1). La droite qui joint deux points conjugués a pour équation

$$t^2(1+t^2)x + c(1+t^2)y - at^2 = 0.$$

Lorsque le paramètre t varie, elle enveloppe la parabole qui a pour équation

$$(x+cy-a)^2 - 4cxy = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(x-cy)^2 - 2ax - 2acy + a^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole tangente aux axes de coordonnées. Les propriétés des points conjugués peuvent se résumer ainsi :

Théorème. — *Étant donnés deux points conjugués sur la strophoïde, c'est-à-dire deux points dont les paramètres sont égaux et de signes contraires, les tangentes en ces points se rencontrent sur la strophoïde.*

Ils sont équidistants de la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

Les droites qui les joignent au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

Les cercles osculateurs à la strophoïde en deux points conjugués rencontrent la strophoïde en deux nouveaux points également conjugués.

La droite qui joint deux points conjugués enveloppe une parabole qui touche les tangentes à la strophoïde au point double.

Le cercle osculateur à la strophoïde au point (t_1) rencontre cette courbe au point (t_2) défini par la relation

$$t_1^3 t_2 = c.$$

De même le centre osculateur en (t_2) la rencontre au point (t_3),

$$t_2^3 t_3 = c,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$t_{n-1}^3 t_n = c;$$

de ces relations on déduit facilement

$$t_n (t_1)^{3^{n-1}} = c^{1+3+3^2+\ldots+3^{n-2}}.$$

Que faut-il pour que le polygone se ferme? Évidemment que $t_n = t_1$. Faisons donc $t_n = t_1$ dans la relation précédente, il vient

$$(t_1)^{3^{n-1}+1} = c^k,$$

en posant

$$k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-2}.$$

Donc, pour obtenir les points qui peuvent donner lieu à un polygone fermé, il faut prendre une racine de l'équation

$$(t_1)^{3^{n-1}+1} = c^k.$$

Mais il est bien évident qu'il faut distinguer deux cas suivant que n est premier ou non. Dans le premier cas, on a un véritable polygone de n sommets; dans le second, on décrit plusieurs fois un polygone d'un moindre nombre de sommets. On peut aussi poser le problème d'une façon un peu différente. Par le point (t_1) menons un cercle qni oscule la strophoïde au point (t_2) donné

par la relation

$$t_1 t_2^3 = c;$$

faisons de même pour le point (t_2) et continuons jusqu'au point (t_n). On a les relations

$$t_1 t_2^3 = c, \quad t_2 t_3^3 = c, \quad \ldots, \quad t_{n-2} t_{n-1}^3 = c, \quad t_{n-1} t_n^3 = c.$$

On en déduit encore

$$t_1 (t_n)^{3^{n-1}} = c^{1+3+3^2+\ldots+3^{n-2}},$$

et, comme dans le cas précédent, les points qui peuvent servir de départ à un polygone fermé sont fournis par l'équation

$$(t_n)^{3^{n-1}+1} = c^k.$$

Il faut, comme précédemment, distinguer deux cas suivant que n est pair ou impair.

La cissoïde oblique a pour équation

(1) $$(y - cx)(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

Les axes choisis sont la tangente de rebroussement et la perpendiculaire à cette droite menée par le point de rebroussement.

En posant $x = ty$, on exprime les coordonnées d'un point de la courbe au moyen des formules

(2) $$x = \frac{at}{(1-ct)(1+t^2)}, \qquad y = \frac{a}{(1-ct)(1+t^2)}.$$

La droite qui joint deux points de la courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ at_1 & a & 1 - ct_1 + t_1^2 - ct_1^3 \\ at_2 & a & 1 - ct_2 + t_2^2 - ct_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}[c-(t_1+t_2)+c(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]x\\ \quad+[-1+t_1t_2-ct_1t_2(t_1+t_2)]y+a=0.\end{array}\right.$$

Si l'on fait $t_1 = t_2$, on a pour équation de la tangente au point (θ)

$$(4)\qquad (c-2\theta+3c\theta^2)x+(-1+\theta^2-2c\theta^3)y+a=0,$$

et l'équation qui donne les valeurs du paramètre θ pour les points de contact des tangentes issues du point (x, y) est

$$(5)\qquad 2cy\theta^3-(y+3cx)\theta^2+2x\theta+y-cx-a=0.$$

D'autre part, si l'on cherche les points d'intersection de la droite qui a pour équation

$$(6)\qquad ux+vy-1=0,$$

avec la cissoïde, on trouve l'équation

$$(7)\qquad ct^3-t^2+(c+au)t+av-1=0,$$

qui donne les valeurs du paramètre t pour les points communs. En écrivant que les équations (5) et (7) sont identiques, on arrive aux relations

$$2y=y+3cx=\frac{2x}{c+au}=\frac{y-cx-a}{av-1}.$$

Par conséquent

$$y-3cx=0$$

représente le lieu des points, tels que les points de contact des tangentes issues de ces points sont en ligne droite. Ces points de contact sont sur la droite

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{1}{3ca}\right)X+\left(\frac{4}{3a}-\frac{1}{2v}\right)Y-1=0.$$

qui, lorsque y varie, passe par un point fixe situé sur l'axe des x. On a donc ce théorème :

Théorème. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une cubique circulaire cuspidale trois tangentes dont les points de contact soient en ligne droite, est une droite issue du point de rebroussement et dont le coefficient angulaire, par rapport à la tangente de rebroussement, est le triple du coefficient angulaire de l'asymptote réelle. La droite qui joint les points de contact passe par un point fixe situé sur la tangente de rebroussement.*

Nous venons de trouver, au moyen de l'équation (7), que les paramètres des points d'intersection d'une cissoïde et d'une droite sont liés par la relation

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c}. \tag{8}$$

Si l'on cherche de même les valeurs du paramètre t, pour les points communs à la cissoïde et au cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &c^2\gamma t^4 - 2c\gamma t^3 + (c^2\gamma + \gamma + 2ac\alpha)t^2 \\ &\quad + (2ac\beta - 2c\gamma - 2a\alpha)t + a^2 + \gamma - 2a\beta = 0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

d'où la relation

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2}{c}. \tag{10}$$

Il résulte des relations (8) et (10) que, si nous considérons quatre points de la cissoïde A, B, C, D sur un cercle, les droites AB et CD rencontrent la cissoïde en deux points P et Q dont les paramètres θ_1 et θ_2 sont liés par la relation

$$\theta_1 + \theta_2 = 0.$$

Les droites qui les joignent au point de rebroussement sont également inclinées sur la tangente de rebroussement, et l'on vérifie aisément qu'ils sont situés sur une parallèle à l'asymptote.

Théorème. — *Si, autour de deux points, pris sur la cissoïde et situés sur une parallèle à l'asymptote de cette courbe, on fait pivoter deux droites, les points d'intersection de ces droites et de la cissoïde sont sur un cercle.*

Les formules (8) et (10) nous montrent encore que, par un point de la cissoïde, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe, fait bien connu ; que par un point (t_1), on ne peut faire passer qu'un cercle osculateur à la cissoïde, cercle dont le paramètre du point d'osculation est donné par la formule

$$3\theta = \frac{2}{c} - t_1.$$

Enfin, comme les quantités t et c ont une signification géométrique simple et bien déterminée, ces mêmes formules permettent de résoudre les problèmes suivants :

Par un point de la cissoïde, mener une tangente à cette courbe.

Trouver le troisième point d'intersection d'une tangente à la cissoïde avec cette courbe, et, plus généralement : *Connaissant deux des points d'intersection d'une droite et de la cissoïde, trouver le troisième.*

Enfin, en utilisant le théorème précédent, *mener en un point le cercle osculateur à la cissoïde.*

Si dans la formule (8) nous faisons $t_1 = t_2 = t_3$, on voit immédiatement que la cissoïde présente un point

d'inflexion et un seul donné par la formule

$$t = \frac{1}{3c}.$$

De même, si dans la formule (10) nous faisons

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4,$$

on obtient un point de la cissoïde où il existe un cercle surosculateur à la courbe et le paramètre de ce point a pour valeur

$$t = \frac{1}{2c}.$$

Les formules (8) et (10) permettent d'énoncer pour la cissoïde des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés pour la strophoïde.

Théorème. — *Si l'on coupe une cissoïde par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la cissoïde en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Théorème. — *Les cercles osculateurs en quatre points concycliques coupent la courbe en quatre nouveaux points également concycliques.*

Théorème. — *Les cercles osculateurs en trois points de la cissoïde en ligne droite la coupent en trois nouveaux points; le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe qui est le point où la cissoïde est surosculée par un cercle.*

Ces formules permettent aussi de démontrer aisément qu'il n'existe pas de quadrilatère complet véritable inscrit dans la cissoïde.

En effet, supposons qu'il en existe un dont les sommets A, B, C, α, β, γ correspondent aux valeurs t_1, t_2,

t_3, θ_1, θ_2, θ_3 du paramètre t. Les points B, C, α; C, A, β; A, B, γ; α, β, γ étant en ligne droite, on a les relations

$$t_2 + t_3 + \theta_1 = \frac{1}{c}, \qquad t_3 + t_1 + \theta_2 = \frac{1}{c},$$

$$t_1 + t_2 + \theta_3 = \frac{1}{c}; \qquad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{1}{c},$$

d'où l'on déduit

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c},$$

c'est-à-dire que les points A, B, C sont aussi en ligne droite, et que, par suite, il n'existe pas de quadrilatère complet véritable inscrit dans la cissoïde.

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR EN UN POINT D'UNE HYPERBOLE;

PAR M. BALITRAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x,y) &\equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ &\equiv \varphi(x,y) + 2Dx + 2Ey + F = 0 \end{aligned} \right.$$

l'équation d'une hyperbole Σ. Nous nous proposons de construire le cercle osculateur en un point M de cette hyperbole. Désignons par P et P_1 les premiers membres des équations de la tangente au point M et d'une autre droite passant par ce point. L'équation du cercle osculateur sera de la forme

$$(2)\qquad S = \varphi(x,y) + 2Dx + 2Ey + F + PP_1 = 0.$$

On en déduit

(3) $$S - 2Dx - 2Ey - F \equiv \varphi(x, y) + PP_1.$$

Or le premier membre de cette identité représente un cercle, le second représente aussi un cercle et celui-ci se détermine facilement, puisqu'il passe par les quatre points d'intersection des droites qui ont pour équation

(4) $$\varphi(x, y) = 0, \qquad P = 0, \qquad P_1 = 0.$$

La droite P_1 est partiellement inconnue, mais sa détermination s'achève précisément par ce fait, que, puisque les points d'intersection des droites (4) sont sur un cercle, les droites P et P_1 sont antiparallèles par rapport aux directions asymptotiques de l'hyperbole Σ.

Nous pouvons donc construire le cercle qui a pour équation

(5) $$S - 2Dx - 2Ey - F = 0.$$

Mais ce cercle et le cercle osculateur $S = 0$ ont pour axe radical la droite

(6) $$2Dx + 2Ey + F = 0,$$

qu'il est facile de construire. En effet, la polaire de l'origine par rapport à Σ a pour équation

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Cette polaire et la droite (6) sont parallèles et leurs distances à l'origine sont dans le rapport de $\frac{1}{2}$.

On arrive donc à la règle suivante pour obtenir le cercle osculateur en un point M d'une hyperbole déterminée d'une façon quelconque :

Construire les directions asymptotiques de l'hyperbole et la tangente au point M; *mener par le point* M *la droite antiparallèle à la tangente par rapport aux*

directions asymptotiques et tracer le cercle C circonscrit au quadrilatère ainsi obtenu; prendre la droite Δ parallèle à la polaire de l'origine par rapport à Σ et située à mi-distance entre cette polaire et l'origine; enfin tracer le cercle passant par M *et ayant pour axe radical avec le cercle précédent la droite* Δ, *c'est le cercle osculateur.*

Si l'on suppose que l'origine soit au centre de la courbe, que, par suite, les asymptotes de la conique coïncident avec les directions asymptotiques et que l'équation de l'hyperbole soit

$$\varphi(x, y) + F = 0,$$

on voit que le cercle osculateur et le cercle C sont concentriques.

Cas de la parabole. — Dans le cas d'une parabole, $\varphi(x, y)$ est un carré parfait

$$\varphi(x, y) \equiv (ax + by)^2,$$

et l'équation (3) devient

$$(7) \qquad S - 2Dx - 2Ey - F \equiv (ax + by)^2 + PP_1.$$

La construction indiquée dans le cas de l'hyperbole subsiste avec une modification évidente.

Prenons le cas d'une parabole tangente aux axes Ox et Oy aux points A et B. La direction de l'axe de la parabole s'obtient en joignant le point O au milieu I de AB. Cette droite OI coupe la parabole au point K. La tangente au point K est précisément la droite Δ. Le centre du cercle C s'obtient en abaissant du point A une perpendiculaire sur OI et en élevant une perpendiculaire à Ox au point A; en prenant l'intersection de ce cercle et de la tangente au point K, on a deux points du cercle osculateur en A à la parabole. Même construction pour le point B.

NOUVEAU THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Dans un article antérieur (¹), j'ai montré que l'*Ausdehnung's Lehre* de Grassmann (²) établit une parenté étroite et inattendue entre un grand nombre de théorèmes connus de Mécanique et de Géométrie; que cette même théorie fournit une source inépuisable de théorèmes nouveaux.

Je vais aujourd'hui signaler un théorème général qui peut être utile en Mécanique. Il m'a été suggéré par la lecture de l'élégante étude du complexe linéaire de M. Fouret (³).

Pour énoncer commodément mon théorème, je vais introduire une définition.

2. *Définition.* — J'appelle *image d'une force sur un plan* le point où la force perce le plan, ce point étant muni d'une masse égale à la valeur algébrique de la projection de la force sur la normale au plan, normale munie d'un sens positif arbitraire, mais déterminé.

J'appelle *image d'un système de forces sur un plan* le centre de gravité des images des forces du système sur le même plan. Si la somme algébrique des masses de ces images n'est pas nulle, le centre de gravité est à distance finie, muni d'une masse égale à la somme algébrique des masses du système. Il est à l'in-

(¹) *La Méthode de Grassmann* (*Nouvelles Annales;* 1892).

(²) Berlin; 1862.

(³) Complément à l'édition française de la *Géométrie du mouvement*, de Schœnflies. Gauthier-Villars et fils; 1893.

fini dans le cas contraire. Dans ce cas, l'image du système peut être représentée par un couple de points de masses égales et de signes contraires, ou par le vecteur qui va d'un ces points à l'autre, multiplié par la masse du point d'arrivée. D'après la définition même du mot *vecteur*, deux de ces couples sont équivalents si les segments qui vont de l'image négative à l'image positive sont parallèles, de même sens, et inversement proportionnels aux masses des deux couples.

Ces préliminaires posés, le théorème s'énonce ainsi :

3. Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces appliquées à un corps rigide soient équivalents, il faut et il suffit que, sur tout plan, l'image du premier système soit identique à celle du second.*

Ce théorème est, par le principe de dualité, corrélatif du théorème des moments vectoriels des forces par rapport à un point, pourvu qu'on accorde au mot *corrélatif* la généralité qu'il comporte.

4. Il serait facile de baser sur les images une théorie des forces appliquées à un corps solide, en suivant le plan que j'ai adopté, d'abord dans mes *Leçons de Statique* (¹) où j'ai utilisé les moments vectoriels par rapport à un point, puis dans mon *Cours de Mécanique* (²) où j'ai fait usage des moments par rapport à un axe. La nouvelle théorie, aussi simple que les deux autres, serait moins naturelle, parce qu'elle ne saurait avoir une représentation matérielle aussi claire. Les théories des moments, en effet, sont suggérées par le levier (solide mobile autour d'un point fixe) et en expriment le principe. Ponr avoir le corrélatif du levier, dans la théorie des images, il faudrait considérer un solide assujetti à

(¹) 1884.
(²) 1893.

une telle liaison qu'il puisse tourner autour de toute droite d'un plan donné, sans pouvoir prendre aucun autre mouvement. Une telle liaison semble difficile à réaliser.

Ce que j'ai appelé *image d'une force sur un plan* mériterait, par continuité, le nom de *moment ponctuel* de la force par rapport au plan. Le mot *image* m'a paru rentrer mieux dans les usages; il a aussi l'avantage d'être plus court.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893 (PREMIÈRE SESSION). SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

Par M. AUDIBERT.

Soit

$$x^2 - y^2 + 2mxy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a+b)x + ab = 0$$

un faisceau d'hyperboles équilatères coupant l'axe des abscisses aux points a, b et l'axe des ordonnées au point c.

I. Si λ est le coefficient angulaire de l'une des asymptotes d'une hyperbole du faisceau, cette courbe aura pour équation

$$(1) \quad x^2 - y^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} xy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a+b)x + ab = 0,$$

celle de son asymptote sera

$$y = \lambda \left[x + \frac{\frac{c^2 - ab}{c}\lambda - (a+b)}{1 + \lambda^2} \right].$$

Cette dernière peut s'écrire

$$(2) \quad \lambda^3 x + \lambda^2 \left(\frac{c^2 - ab}{c} - y \right) + \lambda [x - (a+b)] - y = 0.$$

On voit que, par chaque point (x, y) donné du plan, on pourra mener trois asymptotes (dont deux peuvent être imaginaires) aux hyperboles du faisceau.

Si l'on impose la condition que deux des racines λ_1 et λ_2 de (2) aient entre elles la relation $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, le produit des trois racines étant égal à $\frac{y}{x}$, la troisième racine sera $-\frac{y}{x}$, et (2) devra être divisible par $\lambda x + y$.

Pour que cette division s'effectue, on trouve la condition

$$(3) \qquad 2(y^2 + x^2) - \frac{c^2 - ab}{c} y - (a + b)x = 0,$$

qui représente le lieu cherché.

C'est le cercle lieu des centres des hyperboles du faisceau, ce qu'il était facile de prévoir.

Ce cercle passe par l'origine et coupe en leurs milieux les trois côtés du triangle ABC.

Par un point M pris sur (3) on pourra mener les deux asymptotes rectangulaires de l'hyperbole qui a son centre en ce point. La troisième asymptote, de coefficient angulaire $\frac{y}{x}$, passant en M, rencontrera le cercle en un second point M' qui sera le centre de l'hyperbole du faisceau dont les asymptotes ont pour coefficients $-\frac{y}{x}$ et $+\frac{x}{y}$.

II. Si μ est le coefficient de l'axe de (1), on aura $\lambda = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$ et l'équation de cette hyperbole en fonction de μ s'écrira

$$x^2 - y^2 + \frac{4\mu}{1 - \mu^2} xy + \frac{c^2 - ab}{c} y - (a + b)x + ab = 0.$$

On déterminera les coordonnées de son centre et l'é-

quation de l'axe sera

$$2(1+\mu^2)(y-\mu x)=(1-\mu^2)\left[\frac{c^2-ab}{c}+(a+b)\mu\right].$$

En ordonnant par rapport à μ, on a

$$(4)\quad \begin{cases} \mu^3[2x-(a+b)]-\mu^2\left(2y+\dfrac{c^2-ab}{c}\right) \\ \qquad\qquad +\mu(a+b+2x)-2y=0. \end{cases}$$

On voit que, par un point donné (x, y) du plan, on pourra mener trois axes, dont un toujours réel, aux hyperboles du faisceau.

Si l'on ajoute la condition que deux de ces axes aient des coefficients angulaires égaux et de signes contraires, l'équation

$$\mu^3[2x-(a+b)]+\mu^2\left(2y+\frac{c^2-ab}{c}\right) +\mu(a+b+2x)+2y=0$$

aura une racine commune avec (4).

La somme de ces deux polynômes égalée à zéro

$$\mu^3[2x-(a+b)]+\mu(a+b+2x)=0$$

aura la même racine commune avec (4).

En général, cette racine ne pouvant être nulle, il en résulte que le premier membre de l'équation

$$\mu^2[2x-(a+b)]+2x+a+b=0,$$

qui a ses deux racines égales et de signes contraires, doit diviser (4), d'où la condition

$$(a+b+2x)\frac{c^2-ab}{c}+4(a+b)y=0.$$

Le lieu est une droite.

La condition de réalité des deux racines, $\mu^2>0$, s'exprime par la formule

$$\frac{a+b+2x}{a+b-2x}>0.$$

Ce qui indique que les points de la droite (5) par où passent trois droites réelles satisfaisant aux conditions de l'énoncé sont compris entre les abscisses $-\frac{a+b}{2}$ et $+\frac{a+b}{2}$.

N. B. — M. P. Gris, élève du pensionnat de Notre-Dame du Sacré-Cœur, a aussi résolu la question.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1891 (SUITE ET FIN).

Mathématiques élémentaires.

On donne un triangle ABC, et, dans le plan de ce triangle, on mène une parallèle à la droite AB, qui rencontre la droite BC en un point A′, la droite AC en un point B′, puis on décrit, dans le plan du triangle, deux cercles, l'un sur AA′ comme diamètre, l'autre sur BB′ comme diamètre; soient P et Q les points de rencontre de ces deux cercles.

1° Trouver le lieu des points P et Q quand la droite A′B′, parallèle à AB, se déplace dans le plan du triangle, et suivre sur ce lieu les déplacements des points P et Q quand le point A′ parcourt, dans un sens déterminé, toute la droite indéfinie BC.

2° Suivre, dans les mêmes conditions, les variations de grandeur de la distance des points P et Q.

3° Trouver, parmi tous les triangles ABC que l'on peut inscrire dans un même cercle, quel est celui pour lequel le minimum de la distance des points P et Q est le plus grand.

Rhétorique.

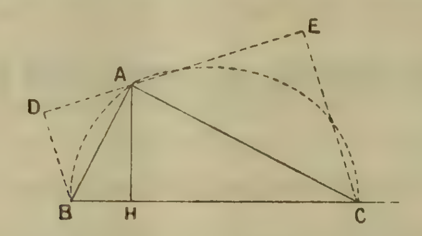
Sur les côtés AB, AC d'un triangle rectangle donné ABC et en dehors de ce triangle, on construit deux triangles rectangles isoscèles DAB, EAC.

1° Démontrer que les trois points D, A, E sont en ligne droite.

2° Trouver les expressions de la surface S et du volume V du tronc de cône qu'engendre l'hypoténuse BC du triangle ABC en tournant autour de la droite DAE.

Trouver le volume V′ engendré par le triangle ABC en tournant autour de la même droite DAE.

3° On exprimera la surface S et les volumes V, V′ en fonction de l'hypoténuse $BC = a$ et de la hauteur correspondante $AH = h$ du triangle ABC, et l'on indiquera comment varient la surface S, le volume V et le rapport $\frac{V}{V'}$, quand, l'hypoténuse BC



restant fixe, le sommet A du triangle ABC se déplace sur la demi-circonférence de cercle décrite sur BC comme diamètre.

Enseignement secondaire spécial.

La distance d'un point M à une circonférence de centre O et de rayon R étant, par définition, la valeur absolue de la différence MO — R, on considère dans un même plan P deux circonférences dont les centres O et O′ sont à une distance D, et dont les rayons R et R′ ($R \geqq R'$) sont donnés. Un point M se déplace dans le plan P en restant toujours à la même distance des deux circonférences.

1° Discuter la ligne L parcourue par le point M.

2° Indiquer les régions du plan P pour lesquelles les points sont plus voisins de la circonférence O que de la circonférence O′.

3° On suppose un mobile parcourant la ligne L de sorte qu'un même arc ne soit jamais parcouru qu'une seule fois, et l'on considère les projections de ce mobile sur une droite X′X passant par le milieu C de OO′, et faisant avec CO′ l'angle α, dont la valeur positive ne dépasse pas 90°. Construire les limites des portions de X′X qui sont parcourues plus de deux fois par la projection.

En supposant les deux circonférences sécantes, on calculera, en fonctions des données R, R', D, α, les portions de XX' ainsi limitées.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1891.

1° Représenter sur une même figure les trois courbes dont les équations en coordonnées rectangulaires sont

$$(1)\qquad y^2 + 3a^2x^2 - 3axy - a^3 = 0,$$

$$(2)\qquad y - x^2 = 0,$$

$$(3)\qquad y + x^3 - 3ax = 0.$$

2° Les points B, B', C, C' où l'ellipse (1) rencontre les courbes (2) et (3) sont les sommets d'un parallélogramme. On demande les lieux décrits par les milieux des côtés de ce parallélogramme et par les sommets du parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse aux points B, B', C, C', quand le paramètre a varie.

3° Montrer qu'il existe une valeur de a et une seule telle que l'ellipse correspondante (1) soit réelle et passe par un point donné P du plan. On donnera l'expression explicite de la valeur de a au moyen des coordonnées du point P.

Déterminer les coefficients angulaires des axes de l'ellipse (1), en distinguant les coefficients angulaires du petit axe et du grand axe.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1892.

En désignant par a, b, x', y' des constantes, on demande de déterminer λ de façon que

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2$$

soit le produit de deux facteurs P, Q du premier degré en x et y. L'équation en λ admet une racine nulle et deux autres racines réelles. Pour l'une de ces racines les facteurs P, Q sont réels, pour l'autre ils sont imaginaires.

Étant donnée une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

en coordonnées rectangulaires, on considère un point fixe $M(x', y')$ et l'on demande de déterminer deux droites P, Q telles que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à M divisé par le produit de ses distances à P et à Q soit constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point de l'ellipse considéré. On formera explicitement les équations de ces droites en supposant M sur l'ellipse. Lieu de leur intersection quand M parcourt l'ellipse.

Inversement, étant donnée la droite (P) $ux + vy - 1 = 0$, peut-on trouver un point M et une droite Q tels que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse à M divisé par le produit de ses distances à P, Q soit constant? Montrer qu'on trouve en général deux positions pour M, symétriques par rapport à P. Comment la droite P doit-elle être placée pour que ces deux solutions soient réelles?

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1893.

On considère la courbe (C) décrite quand t varie de $+\infty$ $-\infty$ par le point dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3.$$

I. Trouver les lieux décrits par les points dont les coordonnées sont respectivement égales aux cosinus des angles que font avec les axes de coordonnées :

1° La tangente;

2° La normale principale;

3° La perpendiculaire au plan osculateur en un point de la courbe.

II. Montrer que l'une des bissectrices de l'angle formé par la tangente et la perpendiculaire au plan osculateur en un point de la courbe a une direction fixe et que, par conséquent, (C) peut être regardée comme une courbe tracée sur un cylindre, de manière à couper, sous un angle de 45°, toutes les génératrices du cylindre. Former l'équation de la section droite de ce cylindre rapportée à deux axes situés dans son plan, et la construire.

III. Par un point donné sur (C), combien peut-on mener de plans qui passent par une tangente à la courbe et qui soient perpendiculaires au plan osculateur au point de contact de cette tangente?

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1893.

Mathématiques (3 heures).

I. Dans un triangle on donne a, A et le produit

$$b(b+c) = K^2.$$

1° Déterminer par le calcul b et c. Discussion.

2° Traiter la même question géométriquement, sans calcul.

II. On donne un triangle ABC et, dans l'espace, une droite indéfinie X'AX passant par A et faisant avec AB et AC les angles β et γ. Un point M se meut sur la droite X'AX. Étudier la variation du rapport $\frac{MB}{MC}\cdot$ Montrer que les positions remarquables du point M sont les points de rencontre de la droite X'AX avec la sphère qui a son centre sur cette droite et qui passe par les points B et C.

Géométrie descriptive (2 heures et demie).

1° Construire un tétraèdre TABC, dont la base ABC est sur le plan horizontal, connaissant les longueurs des six arêtes :

$BC = 200^{mm}$, $CA = 189^{mm}$, $AB = 151^{mm}$,
$TA = 113^{mm}$, $TC = 107^{mm}$, $TC = 131^{mm}$

(BC parallèle à xy à la distance de 30mm, B à droite, A plus éloigné que BC de xy).

2° Construire un cône de révolution à axe vertical, dont la trace horizontale, tangente à AB, a pour centre la projection t de T et dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle égal à l'inclinaison de la face BTC sur le plan horizontal.

3° Construire l'intersection de la pyramide et du cône. Tangentes aux points remarquables.

Représenter la portion de la pyramide extérieure au cône, portion supposée opaque.

Calcul trigonométrique (1 heure).

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés

$$a = 2062, \qquad b = 1591, \qquad c = 981.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1895.

SOLUTION PAR M. AUDIBERT.

Nous supposerons $a > b > c > 0$.

I. Soient t_1 le paramètre d'un second point de C, x, y, z les coordonnées du milieu de la corde (t, t_1); des égalités

$$x = \frac{1}{t-a} + \frac{1}{t_1 - a},$$

$$y = \frac{1}{t-b} + \frac{1}{t_1 - b},$$

$$z = \frac{1}{t-c} + \frac{1}{t_1 - c},$$

on tire

$$(1) \quad \begin{cases} x(tt_1) - (1 + ax)(t + t_1) + a(2 + ax) = 0, \\ y(tt_1) - (1 + by)(t + t_1) + b(2 + by) = 0, \\ z(tt_1) - (1 + cz)(t + t_1) + c(2 + cz) = 0. \end{cases}$$

L'élimination de tt_1 et de $t + t_1$ conduit à l'équation de la surface S sous les deux formes

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} (1) & \left\{\begin{array}{l} (a-b)(a-c)(b-c)xyz \\ \qquad -(a-b)(a+b-2c)xy \\ \qquad +(a-c)(a+c-2b)xz \\ \qquad -(b-c)(b+c-2a)yz \\ \qquad +2(b-c)x-2(a-c)y+2(a-b)z=0 \end{array}\right. \\ \text{et} & \\ (2) & \left\{\begin{array}{l} [(a-b)x+2][(b-c)y+2][(a-c)z-2] \\ \quad +[(a-c)x+2][(a-b)y-2][(b-c)z-2]=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

II. La courbe C peut être considérée comme la limite d'un polygone inscrit de côtés infiniment petits, dont les milieux sont sur la surface S; elle est donc située sur cette surface dont l'équation est d'ailleurs vérifiée par les coordonnées du point (t). En outre, l'équation (S) (2) prouve que les deux groupes de droites

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} (a-c)x+2=0, & (b-c)y+2=0, \\ (a-b)x+2=0, & (b-c)z-2=0, \\ (a-b)y-2=0, & (a-c)z-2=0, \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} (a-b)x+2=0, & (a-b)y-2=0, \\ (a-c)x+2=0, & (a-c)z-2=0, \\ (b-c)y+2=0, & (b-c)z-2=0 \end{array}\right.$$

sont situés sur la surface S.

Le premier de ces groupes représente les trois asymptotes de C.

Le second représente les trois droites parallèles aux axes se projetant sur les centres des hyperboles équilatères projections de C sur les plans des coordonnées. On pouvait prévoir qu'elles seraient comprises sur la surface S, car elles sont les lieux des milieux des cordes de C qui se projettent suivant les diamètres de ces hyperboles.

Ce groupe représente aussi dans chaque plan les asymptotes des projections de C ou des hyperboles équilatères

$$(4)\quad \begin{cases} (a-b)xy + 2(y-x) = 0, \\ (a-c)xy + 2(z-x) = 0, \\ (b-c)yz + 2(z-y) = 0. \end{cases}$$

III. Si des deux premières équations (1) on tire les valeurs de tt_1 et de $t+t_1$, on trouve

$$t+t_1 = \frac{(a^2-b^2)xy + 2(ay-bx)}{(a-b)xy + y - x},$$

$$tt_1 = \frac{ab[(a-b)xy + 2(y-x)] + a^2x - b^2y + 2(a-b)}{(a-b)xy + y - x}.$$

Ces deux paramètres sont racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont fonctions des coordonnées x et y d'un point déterminé M de S. A chacun de ces points correspondra donc une seule corde réelle ou imaginaire.

IV. La condition de réalité des racines déduite des relations qui précèdent s'exprime par la formule

$$(5)\quad \begin{cases} (a-b)[(a-b)x+2] \\ \quad \times [(a-b)y-2][(a-b)xy + 2(y-x)] > 0. \end{cases}$$

On en conclut que les points de S qui sont milieux de cordes *imaginaires* de C se projettent sur chacun des plans coordonnés dans la région délimitée par l'une des hyperboles (4) et ses asymptotes.

V. Nous avons montré que les six droites des groupes (2) et (3) sont situées sur S. Il faut de plus examiner si des droites orientées d'une façon quelconque par rapport aux axes, telles que celles représen-

tées par les équations

$$x = \alpha z + p,$$
$$y = \alpha' z + p',$$

peuvent aussi être appliquées sur cette surface.

Si nous introduisons ces expressions dans S (1), nous obtenons une équation du troisième degré en z dans laquelle le coefficient de z^3 est

$$(a-b)(a-c)(b-c)\alpha\alpha'.$$

Ce coefficient ne pourra s'annuler qu'en faisant $\alpha = 0$, ou $\alpha' = 0$, ou simultanément $\alpha = 0$ et $\alpha' = 0$.

Dans le dernier cas, nous retrouverons les droites (2) et (3). La première hypothèse nous fait découvrir le groupe nouveau

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{c} (a-b)(a-c)x = b+c-2a, \\ (a-c)^2 z + (a-b)^2 y + 2(b+c-2a) = 0, \\ (a-b)(b-c)y = a+c-2b, \\ (a-b)^2 x + (b-c)^2 z + 2(a+c-2b) = 0, \\ (a-c)(b-c)z = a+b-2c, \\ (b-c)^2 y + (a-c)^2 x + 2(a+b-2c) = 0. \end{array}\right.$$

VI. Les droites joignant les milieux d'une infinité de cordes de C ne peuvent être que celles situées sur la surface S.

Pour trouver les surfaces lieux des cordes qui rencontrent ces droites, il faut écrire que la corde (t, t_1),

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} tt_1(y-x)+(t+t_1)(ax-by) = a^2x - b^2y + 2(a-b), \\ tt_1(z-x)+(t+t_1)(ax-cz) = a^2x - c^2z + 2(a-c), \end{array}\right.$$

rencontre une des droites des trois groupes (2), (3), et (6).

Les droites du groupe (2) ne fourniront pas de lieu. Prenons, par exemple, la première d'entre elles,

$$(a-c)x + 2 = 0, \qquad (b-c)y + 2 = 0.$$

Ces valeurs de x et de y annulent le critère (5), et, par suite, $t = t_1 = c$ et $z = \infty$; la droite ne rencontre pas de corde réelle.

La première droite du groupe (3) joint les milieux des cordes réelles qui se projettent sur les diamètres de l'hyperbole $(a-b)xy + 2(y-x) = 0$.

Le lieu existe donc pour elle. Cependant le critère (5) est aussi annulé par $x = -\frac{2}{a-b}$ et $y = \frac{2}{a-b}$; mais on n'en peut conclure que $t = t_1$, car en même temps l'équation du deuxième degré, dont t et t_1 sont racines, a tous ses coefficients nuls. Il y a simplement indétermination, ce qui doit être.

La condition de rencontre de la droite en question et de la corde (7) est

$$2tt_1 - (a+b)(t+t_1) + 2ab = 0.$$

A l'aide de (7), on éliminera les paramètres, d'où résultera l'équation du lieu

$$(a-b)^2xy - (a-c)^2xz - (b-c)^2yz \\ + 2(b-c)x + 2(a-c)y - 2(a+b-2c)z = 0.$$

C'est un hyperboloïde à une nappe.

Les droites du groupe (6) fournissent chacune un lieu.

Nous ne donnerons ici que le résultat du calcul pour la première de ces droites :

$$(a-b)^2xy - (a-c)^2xz + 2(b-c)x \\ + 2(a-b)y - 2(a-c)z = 0.$$

C'est un paraboloïde hyperbolique.

Il est facile de vérifier que cette surface renferme la courbe C et la première droite du groupe (6).

PROBLÈME D'ALGÈBRE RELATIF A LA NOMOGRAPHIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. Je rappelle en deux mots le principe de la méthode de représentation de certaines équations à trois variables au moyen des *points isoplèthes*, qui se trouve développée dans le Chapitre IV de ma *Nomographie* (¹).

Considérons trois systèmes de points dépendant chacun d'un paramètre arbitraire et définis par les formules

$$x = f_1(\alpha_1), \qquad x = f_2(\alpha_2), \qquad x = f_3(\alpha_3),$$
$$y = \varphi_1(\alpha_1), \qquad y = \varphi_2(\alpha_2), \qquad y = \varphi_3(\alpha_3).$$

Leur ensemble, si l'on suppose chacun de ces points coté au moyen de la valeur du paramètre correspondant, constitue un abaque de l'équation en α_1, α_2, α_3, qui exprime l'alignement de trois de ces points.

Les applications de cette méthode sont des plus fréquentes dans la pratique.

Il est intéressant de reconnaître la forme des équations représentées par les plus simples de ces abaques, ceux dans lesquels chaque système de points isoplèthes est constitué par des points cotés, régulièrement espacés sur une droite, c'est-à-dire tels que leurs distances respectives soient proportionnelles à la différence de leurs cotes.

Dans ce cas, les formules ci-dessus doivent évidem-

(¹) *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen de abaques*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

ment prendre la forme

$$x = m_1\alpha_1 + n_1, \qquad x = m_2\alpha_2 + n_2, \qquad x = m_3\alpha_3 + n_3,$$
$$y = p_1\alpha_1 + q_1, \qquad y = p_2\alpha_2 + q_2, \qquad y = p_3\alpha_3 + q_3.$$

L'équation représentée peut dès lors s'écrire

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_1 + n_1 & p_1\alpha_1 + q_1 & 1 \\ m_2\alpha_2 + n_2 & p_2\alpha_2 + q_2 & 1 \\ m_3\alpha_3 + n_3 & p_3\alpha_3 + q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, sous forme développée,

$$(a) \quad A_1\alpha_2\alpha_3 + A_2\alpha_3\alpha_1 + A_3\alpha_1\alpha_2 + B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + C = 0,$$

les coefficients de cette équation étant donnés par les formules

$$A_1 = m_2p_3 - m_3p_2,$$
$$A_2 = m_3p_1 - m_1p_3,$$
$$A_3 = m_1p_2 - m_2p_1,$$
$$B_1 = m_1(q_2 - q_3) - p_1(n_2 - n_3),$$
$$B_2 = m_2(q_3 - q_1) - p_2(n_3 - n_1),$$
$$B_3 = m_3(q_1 - q_2) - p_3(n_1 - n_2),$$
$$C = n_1q_2 - n_2q_1 + n_2q_3 - n_3q_2 + n_3q_1 - n_1q_3.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (a) est-elle représentable par trois systèmes *réguliers* de points isoplèthes? En d'autres termes, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 et C étant donnés, peut-on toujours trouver un système de valeurs *réelles* de m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3, p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 satisfaisant aux équations (I) ? Tel est le problème d'Algèbre qui va être ici examiné.

2. Remarquons tout d'abord que, si l'équation (a) est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, on peut toujours faire coïncider l'axe des y avec la droite sur laquelle est disposé l'un de ceux-ci en

plaçant l'origine au point coté o. On n'enlève donc rien à la généralité du problème traité en prenant

$$m_1 = 0, \qquad n_1 = 0, \qquad p_1 = 1, \qquad q_1 = 0.$$

Le système précédent devient alors

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} (1) & A_1 = m_2 p_3 - m_3 p_2, \\ (2) & A_2 = m_3, \\ (3) & A_3 = - m_2, \\ (4) & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5) & B_2 = m_2 q_3 - p_2 n_3, \\ (6) & B_3 = n_2 p_3 - q_2 m_3, \\ (7) & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

L'élimination de m_2 et m_3 entre (1), (2) et (3) donne

$$(8) \qquad A_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0,$$

équation incompatible avec l'hypothèse où deux des coefficients A_1, A_2 et A_3 seraient nuls à l'exclusion du troisième ([1]).

Il n'y a, par suite, à envisager que les trois hypothèses suivantes :

1° Les trois coefficients A_1, A_2, A_3 sont différents de zéro, ce que nous écrirons

$$A_1 \neq 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0.$$

2° Un seul d'entre eux est nul. Un choix convenable de notations permet toujours d'écrire cette hypothèse

$$A_1 = 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0.$$

([1]) Il résulte, en particulier, de là que l'équation $\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 = 0$, qui traduit la multiplication, n'est pas représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, mais elle est représentable par trois systèmes rectilignes dont deux réguliers, savoir :

$$x = 1, \qquad x = -1, \qquad x = \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1},$$
$$y = \alpha_2, \qquad y = \alpha_3, \qquad y = 0.$$

3° Ils sont nuls tous les trois,

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

3. *Premier cas.* — $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$.

Les équations (2) et (3) donnent

$$m_2 = -A_3, \qquad m_3 = A_2,$$

et le système (I) se réduit à

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} (1') & A_1 = -A_2 p_2 - A_3 p_3, \\ (4') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5') & B_2 = -A_3 q_3 - p_2 n_3, \\ (6') & B_3 = n_2 p_3 - A_2 q_2, \\ (7') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Entre ces cinq équations éliminons q_2, n_3, p_3, q_3.

De (1′) et (4′) nous tirons d'abord

$$p_3 = -\frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}, \qquad n_3 = B_1 + n_2.$$

Portant ces valeurs de n_3 et de p_3 respectivement dans (5′) et (6′), on tire de celles-ci

$$q_3 = -\frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3}, \qquad q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right).$$

L'équation (7′) devient alors

$$C = -n_2 \frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3} + \frac{B_1 + n_2}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$(9) \qquad A_1 n_2^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3) n_2 + A_3(B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Le paramètre p_2 ayant disparu de lui-même dans cette élimination, on voit qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque. En vue de la plus grande simplicité, nous prendrons naturellement

$$p_2 = 0.$$

L'équation (9) détermine n_2. Ce paramètre devant être réel, le problème ne sera possible qu'autant que l'on aura

$$(A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3)^2 - 4 A_1 A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) \geqq 0$$

ou

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 \\ \qquad\qquad - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geqq 0. \end{array} \right.$$

Si cette inégalité est satisfaite, l'équation (9) donne pour n_2 deux valeurs ν et ν'. Adoptant l'une d'entre elles, ν par exemple, on a pour q_2, n_3, p_3, q_3 les valeurs

$$q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + \nu \frac{A_1}{A_3}\right), \qquad n_3 = B_1 + \nu,$$

$$p_3 = -\frac{A_1}{A_3}, \qquad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

4. *Deuxième cas.* — $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$.

Le seul changement à ce qui précède tient à ce qu'ici l'équation (9), se réduisant à

$$(A_3 B_3 - A_2 B_2) n_2 + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0,$$

fournit pour n_2 une valeur toujours satisfaisante, savoir

$$n_2 = A_3 \frac{B_1 B_3 - A_2 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}.$$

Dès lors, les formules qui terminent le numéro précédent deviennent

$$q_2 = -\frac{B_3}{A_2}, \qquad n_3 = A_2 \frac{B_1 B_2 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3},$$

$$p_3 = 0, \qquad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

Rappelons, d'ailleurs, qu'on a toujours

$$m_2 = -A_3, \qquad m_3 = A_2, \qquad p_2 = 0.$$

On voit, en outre, que n_2 et n_3 devenant infinis lorsque $A_2 B_2 - A_3 B_3 = 0$, la solution est, dans ce cas, illusoire. Il convient donc de compléter l'hypothèse faite par la condition

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

5. *Troisième cas.* — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Le système (I′) se réduit à

$$(\text{I}'')\quad \begin{cases} (4'') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5'') & B_2 = - n_3 p_2, \\ (6'') & B_3 = n_2 p_3, \\ (7'') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous nous donnerons les valeurs de deux des six inconnues ; mais ici, pas plus que précédemment, le choix n'est absolument arbitraire.

Ainsi les équations (5″) et (6″) montrent qu'on ne peut annuler aucune des qualités n_2, p_2, n_3, p_3, car B_2 et B_3 sont nécessairement différents de o ; dans le cas contraire, en effet, une des variables α_2 ou α_3 cesserait de figurer dans l'équation (1), les coefficients des rectangles étant déjà supposés nuls.

De même, l'équation (7″) montre qu'on ne saurait généralement pas se donner à la fois $q_2 = q_3 = 0$, ...

Une hypothèse, toujours admissible, consiste à prendre

$$p_3 = 1, \qquad q_2 = 0.$$

Le système (I″) devient alors

$$\begin{aligned} B_1 &= n_3 - n_2, \\ B_2 &= - n_3, \\ B_3 &= n_2 p_3, \\ C &= n_2 q_3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement

$$n_3 = -B_2,$$
$$n_2 = -(B_1 + B_2),$$
$$p_3 = -\frac{B_3}{B_1 + B_2},$$
$$q_3 = -\frac{C}{B_1 + B_2}.$$

6. *Résumé.* — Pour revenir au problème d'où nous sommes parti, nous pourrons résumer ce qui précède ainsi qu'il suit :

Une équation de la forme (a) est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, et cela d'une infinité de façons, dans les trois cas qui suivent, pour chacun desquels nous donnons le mode de représentation le plus simple :

Premier cas. — $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$,

$$A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geq 0.$$

Formules de la représentation :

$$x = 0, \qquad x = -A_2 \alpha_2 + \rho, \qquad x = -\frac{A_3 B_3 + \rho A_1}{A_2 A_3},$$
$$y = \alpha_1, \qquad y = A_2 \alpha_3 + B_3 + \rho, \qquad y = -\frac{A_1 \alpha_3 + B_2}{A_3}.$$

ρ étant racine de l'équation

$$A_1 \rho^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3)\rho + A_3(B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Deuxième cas. —

$$A_1 = 0, \qquad A_2 \neq 0, \qquad A_3 \neq 0, \qquad A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

Formules de la représentation :

$$x = 0,\quad x = -A_3\alpha_2 + A_3\,\frac{B_1B_3 - A_2C}{A_2B_2 - A_3B_3},\quad x = A_2\alpha_3 + A_2\,\frac{B_1B_2 - A_3C}{A_2B_2 - A_3B_3},$$

$$y = \alpha_1,\quad y = -\frac{B_3}{A_2},\quad y = -\frac{B_2}{A_3}.$$

On voit que dans ce cas les systèmes α_2 et α_3 sont disposés sur des droites parallèles.

Troisième cas. — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Formules de la représentation :

$$x = 0,\quad x = -(B_1 + B_2),\quad x = -B_2,$$

$$y = \alpha_1,\quad y = \alpha_2,\quad y = -\frac{B_3\alpha_3 + C}{B_1 + B_2}.$$

Dans ce cas, les trois systèmes (α_1), (α_2), (α_3) sont disposés sur des droites parallèles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1891.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Arithmétique et Algèbre (3 *heures et demie*).

I. En mesurant l'hypoténuse a et le côté b d'un triangle rectangle ABC, on a trouvé

$$a = 75^{\text{m}} \text{ à } \pm 0^{\text{m}},2 \text{ près},$$
$$b = 32^{\text{m}} \text{ à } \pm 0^{\text{m}},1 \text{ près}.$$

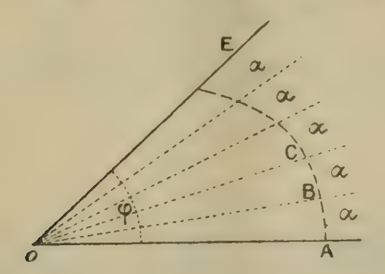
On demande l'approximation avec laquelle on pourra obtenir l'angle B avec ces données.

II. Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}}.$$

Construction de la courbe pour le cas où $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

III. Étant donné un angle $AOE = \varphi$, on partage cet angle en n parties égales; sur l'un de ses côtés on porte une lon-



gueur OA égale à l'unité et l'on mène AB faisant avec OA un autre angle donné α.

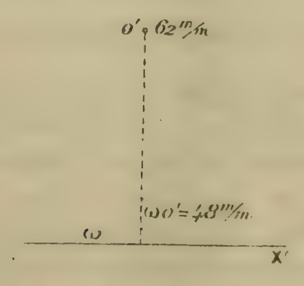
Au point B, on mène BC faisant avec OB le même angle.

On demande la limite vers laquelle tend le segment OE, quand n croît indéfiniment.

Géométrie cotée (1 *heure et demie*).

XX′ est la trace horizontale d'un plan P qui fait un angle de 40° avec le plan horizontal; O′ est la projection horizontale d'un point O dont la cote verticale est de 62^{mm}, la distance O′ω de O′ à XX′ étant de 48^{mm}.

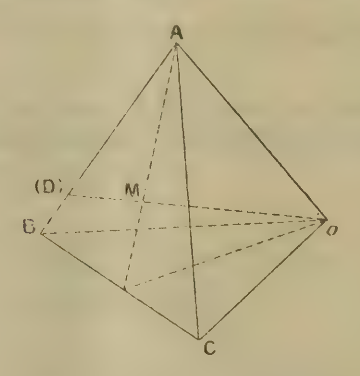
1° Tracer la projection cotée d'une droite (D) passant par



le point O, parallèle au plan P et faisant un angle de 25° avec le plan horizontal; mener par cette droite un plan Q perpen-

diculaire au plan P, construire les traces du plan Q sur le plan horizontal et sur le plan P.

2° Tracer la projection cotée d'un tétraèdre régulier OABC dont le point O est un sommet, dont la droite (D) est un axe,



dont un des côtés BC est situé dans le plan P, et dont par conséquent le plan Q est un plan de symétrie.

Calcul trigonométrique (1 *heure*).

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{3} - 157^\circ\right) = \frac{(0,00167)^2 \times \operatorname{tang}^4 133^\circ 21' 12''}{\sin^3 67^\circ 19' 25'' \times \cos^5 260^\circ 14' 17'',5},$$

x compris entre 0° et 360°.

Géométrie et Géométrie analytique (3 *heures et demie*).

I. *Géométrie.* — Triangles sphériques polaires.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés.

II. *Géométrie analytique.* — Étant donné un cercle

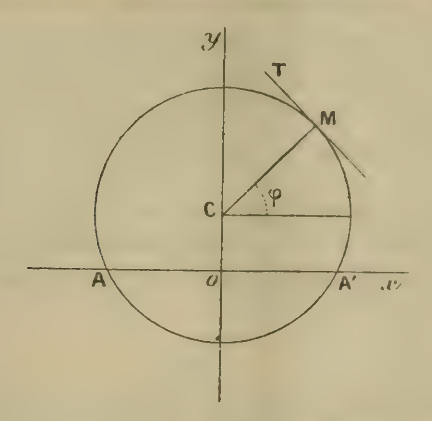
$$x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2,$$

rapporté à des axes rectangulaires Oxy et qui coupe l'axe des x en deux points A et A′, on considère un point quelconque M de ce cercle défini par l'angle φ que le rayon CM fait avec l'axe des x.

Trouver l'équation générale des coniques passant par les points A et A′ et tangentes en M à la circonférence C; démontrer que toutes ces coniques ont leurs axes parallèles; trouver la direction de ces axes.

Parmi ces coniques on considérera :

1° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de l'axe des y sont conjuguées. Déterminer géomé-



triquement son centre et ses axes en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point M parcourt la circonférence C;

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de l'axe des x sont conjuguées. Mêmes questions que pour la précédente.

On exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1892.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Arithmétique et Algèbre (3 *heures et demie*).

I. Étude de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^k}$.

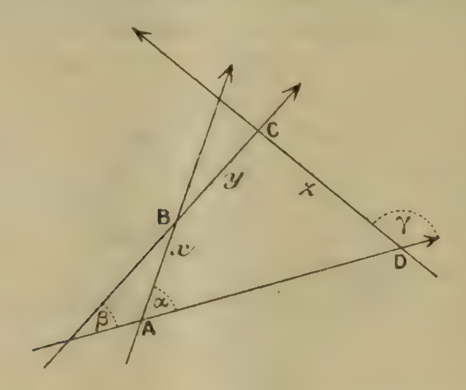
II. Déterminer les valeurs algébriques x, y, z des trois segments d'un contour ABCD connaissant :

1° Les angles α, β, γ formés par les droites sur lesquelles sont situés les segments avec celle sur laquelle est située la résultante AD;

2° La valeur algébrique r de la résultante;

3° La somme algébrique s des trois segments.

Discussion, interprétation géométrique des résultats.



III. Calculer à 0,0001 près la tangente de l'arc de 18°, en remarquant que le sinus de cet arc est la moitié du côté du décagone régulier inscrit.

Géométrie cotée (*2 heures et demie*).

Une sphère (S) dont le centre O est dans le plan horizontal de cote 0 a pour rayon $R = 40^{mm}$. Construire les intersections de cette sphère avec les arêtes d'un trièdre trirectangle dont le sommet est en O et dont les deux faces font avec le plan horizontal des angles de 48° et de 69°.

Projections de l'octaèdre inscrit dont ces points sont les sommets.

Projection de la figure sur un plan vertical parallèle à l'une des arêtes du trièdre.

Calcul trigonométrique (*1 heure*).

Calculer

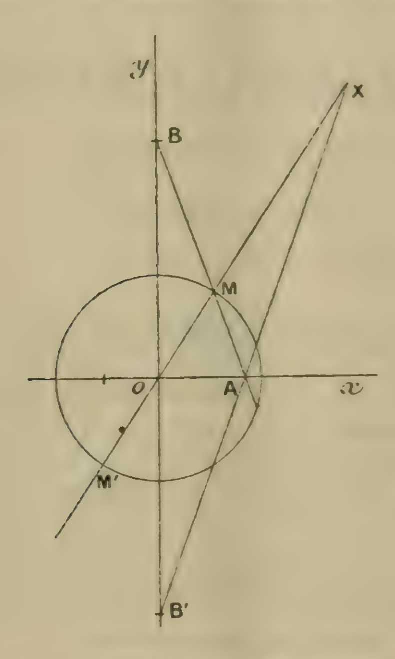
$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2} + 18^\circ\right) = \frac{\sin^3 162^\circ 25' 24'',1 \times \cos^2 277^\circ 14' 2'',3 \times \operatorname{tang}^4 80^\circ 5' 2''}{0,960235^7 \times \sin 7^\circ 38' 2'',5};$$

x compris entre 0 et 360°.

Géométrie et Géométrie analytique (3 *heures et demie*).

I. *Géométrie.* — Droite perpendiculaire à un plan. Définition. On peut mener une droite perpendiculaire à un plan. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites du plan non parallèles entre elles. Théorèmes à l'appui.

II. *Géométrie analytique.* — Oxy étant deux axes rectangulaires, (C) une circonférence de rayon R ayant son centre à l'origine, B et B′ deux points sur l'axe des y à égale



distance du centre, $OB = OB' = b$; on prend un point M sur la circonférence (C), la droite BM coupe l'axe des x en un point A; les deux droites OM et B′A prolongées se coupent en un point X. On demande :

1° Le lieu du point X quand le point M parcourt la circonférence. Ce lieu est une conique dont on met immédiatement en évidence un foyer et une directrice. Déterminer la nature de la courbe suivant la grandeur de b. Construction de la tangente au point X; elle coupe l'axe des x au même point que la tangente en M à la circonférence. Axes de la courbe.

2° En considérant dans l'équation de ces coniques b comme

un paramètre arbitraire, on obtient un faisceau de coniques. Par chaque point X du plan passent deux de ces coniques. Reconnaître quelle est leur nature en séparant le plan en régions par des courbes convenables.

3° Les tangentes menées aux points où toutes les coniques de ce faisceau sont rencontrées par un diamètre prolongé tel que OMM′ passent par deux points fixes sur l'axe des x. En déduire le lieu des points du plan pour lesquels les tangentes aux deux courbes qui passent par chacun de ces points sont rectangulaires.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1893.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Arithmétique et Algèbre (3 *heures et demie*).

I. Vraie valeur des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée.

II. Étude des variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 4x - a^2}{x^2 + 8x + a^2}$$

pour toutes les valeurs du paramètre a^2.

III. Calculer à 0,001 près la valeur de

$$\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

Géométrie cotée (2 *heures et demie*).

Un triangle ABC est situé dans le plan de cote 0. Ses côtés ont pour valeurs

$$AB = 65^{mm}, \qquad BC = 62^{mm}, \qquad CA = 51^{mm} :$$

1° Construire sur ce triangle un tétraèdre SABC sachant que ses arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires et dont la hauteur, issue du sommet S, est donnée et égale à 20^{mm}. Sphère circonscrite à ce tétraèdre.

2° Construire le tétraèdre formé par les plans tangents menés à la sphère circonscrite au tétraèdre précédent aux points S, A, B, C.

On se servira comme plan auxiliaire de projections du plan vertical parallèle à la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

Calcul trigonométrique (1 *heure*).

Valeurs de x comprises entre 0° et 360° satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{3}+15^\circ\right)=\frac{(\sin 263^\circ 32' 08'')^3 \times (\cos 160^\circ 34' 15'')^2}{(\operatorname{tang} 222^\circ 06' 31'')^5 \times (\cos 327^\circ 49' 47'')}.$$

Géométrie et Géométrie analytique.

I. *Géométrie.* — Plans perpendiculaires :

1° Lorsque deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième.

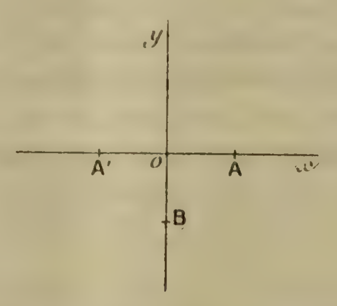
2° Si deux droites D et D′ rectangulaires sont situées respectivement dans deux plans P et P′ rectangulaires, l'une au moins des deux droites D et D′ est perpendiculaire au plan qui contient l'autre.

3° Les plans menés par les arêtes d'un trièdre perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

II. *Géométrie analytique.* — Ox et Oy étant deux axes rectangulaires et A, A′, B trois points situés sur ces axes à la même distance de l'origine et disposés comme l'indique la figure, $OA = OA' = OB = R$, on demande :

1° L'équation des paraboles circonscrites au triangle AA′B en prenant comme paramètre arbitraire le coefficient angulaire f de l'axe. Par chaque point du plan passent deux de ces paraboles : distinguer les régions du plan pour lesquelles ces deux paraboles sont réelles. Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une cir-

conférence C : construire en coordonnées polaires le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle A A′ B.



2° Lorsqu'un point M décrit la circonférence C, le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.

3° L'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABA′, et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point M de la circonférence C, passe par ce point M.

SUR LES CONGRUENCES DE DROITES ET LA COURBURE DES SURFACES;

Par M. H. ADER,

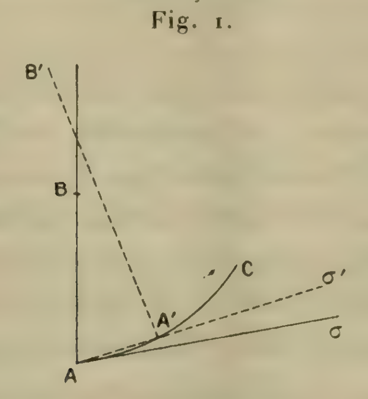
Éléve-ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si l'on considère une génératrice G d'une congruence de droites, on sait que toutes les surfaces passant par G et dont les génératrices appartiennent à la congruence sont tangentes en deux points de G et que parmi ces surfaces il n'y en a que deux qui sont développables. Ce résultat est, en particulier, démontré dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Mannheim par des considérations fondées sur la théorie générale des déplacements infiniment petits d'un corps solide dans l'espace.

Proposons-nous d'abord d'en donner une démonstration directe.

Supposons que la droite G se déplace sans cesser de faire partie de la congruence; chacun de ses points décrira une surface trajectoire, qui, en général, ne sera pas tangente à G; il ne peut y avoir, en effet, plus de deux points sur G, tels que cette droite soit tangente à leur surface trajectoire, car, s'il y en avait davantage, toutes les surfaces appartenant à la congruence et passant par G seraient de raccordement tout le long de cette génératrice. Prenons donc deux points quelconques A et B dont les surfaces trajectoires S et T ne soient pas

Fig. 1.



tangentes à G. Pour définir une surface de la congruence, il suffira de donner sa trace sur S ou T. Je dis que, si l'on se donne le plan tangent à l'une des surfaces, à l'un des points A ou B, dont les surfaces trajectoires S et T ne sont pas tangentes à G, cela suffira pour déterminer le plan tangent en un point quelconque de la génératrice. Je vais démontrer pour cela que, si l'on considère sur S une directrice C tangente à la droite $A\sigma$, la surface correspondante est de raccordement avec celle qui a pour directrice la section de S par le plan $BA\sigma$.

Je considère la section par le plan $BA\sigma'$ voisin de $BA\sigma$. La surface qui a pour directrice cette section a deux gé-

nératrices communes AB, A'B', avec celle qui a pour directrice C. Si je suppose que BAσ' se rapproche indéfiniment de BAσ, je vois qu'à la limite les deux surfaces ayant pour directrices la courbe C et la section BAσ ont deux génératrices infiniment voisines communes, et se raccordent par suite le long de AB. Les plans tangents en A et B aux surfaces de la congruence se correspondent donc homographiquement, et aux plans doubles de ces deux faisceaux correspondent deux surfaces qui ont même plan tangent en A et B et sont, par suite, développables.

Soient F_1 et F_2 les points où G touche les arêtes de rebroussement de ces deux surfaces; ce sont les foyers relatifs à la génératrice G. Le lieu de ces foyers est formé de deux surfaces S_1 et S_2 (ou plutôt de deux nappes d'une même surface) qu'on appelle *surfaces focales de la congruence*. Il est évident que les arêtes de rebroussement A_1 et A_2 des deux surfaces développables font partie de S_1 et S_2 et que, par suite, la droite G qui est tangente aux deux courbes A_1 et A_2 est aussi tangente aux deux surfaces focales. Toutes les surfaces de la congruence passant par G admettent comme plan tangent en F_1 et F_2 les plans tangents en ces mêmes points à S_1 et S_2. C. Q. F. D.

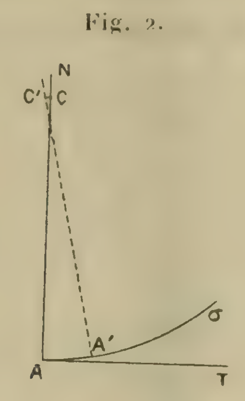
Considérons maintenant les points représentatifs des surfaces de la congruence passant par G. Le lieu de ces points est le segment décrit sur F_1F_2, et capable de l'angle que font les plans tangents communs à toutes les surfaces en F_1 et F_2.

Nous allons maintenant nous proposer de voir ce qui arrive, lorsque les droites de la congruence sont normales à une même surface S.

Les surfaces réglées formées de droites faisant partie

de la congruence sont alors appelées des *normalies*. Je remarque d'abord que si je considère une normalie ayant pour directrice une section normale NAT, la normale à

Fig. 2.

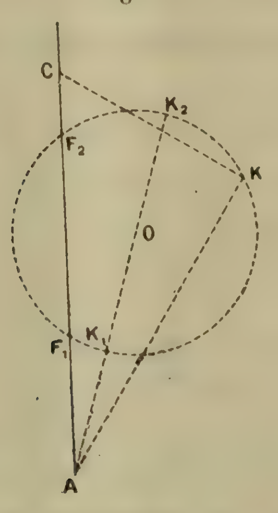


la surface au point A′, voisin de A, se projette sur le plan NAT, suivant la normale à la courbe $A\sigma$; si je coupe alors la normalie par le plan horizontal du point C, centre de courbure de la courbe $A\sigma$, la courbe d'intersection a pour tangente la limite de CC′ qui est une perpendiculaire au plan NAT. Le plan tangent à la normalie au centre de courbure C de la section NAT est donc perpendiculaire au plan NAT.

Si donc je considère une normalie ayant pour directrice une section normale quelconque, pour avoir le centre de courbure C de cette section, il suffira de mener par le point représentatif K de cette normalie une perpendiculaire KC à la droite AK. On voit alors par la seule inspection de la figure que, lorsque le point représentatif se déplace sur le cercle de centre O, il y a deux positions de ce point, K_1 et K_2, pour lesquelles le rayon de courbure est maximum et minimum, c'est-à-dire qu'il existe deux sections normales de courbure maxima et minima. On voit d'ailleurs immédiatement que ces deux sections font avec le plan tangent commun

à toutes les normalies en F_1 des angles complémentaires, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires.

Fig. 3.



Je vais maintenant démontrer que les plans tangents communs en F_1 et F_2 à toutes les normalies sont précisément les deux sections rectangulaires de courbure maxima et minima; pour cela je coupe la surface par un plan infiniment voisin du plan tangent en A.

Les carrés des rayons $A\gamma$ de la courbe d'intersection

Fig. 4.

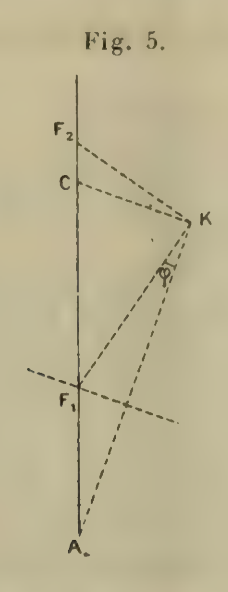
sont en raison inverse des rayons de courbure des sections normales correspondantes.

Aux sections de courbure maxima et minima $A\alpha$ et $A\beta$ correspondent donc un rayon minimum $A\alpha$ et un

rayon maximum $A\beta$. On en déduit que les normales à la surface en α et β rencontrent la normale en A, c'est-à-dire que les normalies correspondantes sont développables.

Cela étant, on peut alors établir immédiatement la

Fig. 5.



relation d'Euler. Il suffit pour cela de mener par le point F_1 une perpendiculaire à AK et d'écrire l'égalité entre les rapports anharmoniques que détermine sur cette droite et sur AF_1 le faisceau $K.AF_1CF_2$,

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{\cot\varphi}}{1} = \frac{\dfrac{R_1}{R_2}}{\dfrac{R - R_1}{R_2 - R}},$$

d'où l'on déduit, par une suite de transformations très simples,

$$\frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{R}.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1892.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

Soient Q une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné E, et A le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan P de la courbe de contact des deux surfaces :

1° Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 homofocales avec l'ellipsoïde E et telles que les plans polaires P_1, P_2, P_3 du point A par rapport aux quadriques Q_1, Q_2, Q_3 passent par le centre de la quadrique Q.

2° Les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de la quadrique Q, et les coniques C_1, C_2, C_3 intersections des surfaces (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 sur les plans principaux de l'ellipsoïde E sont des coniques homofocales.

On projettera, en particulier, ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit par les foyers des coniques projetées, quand la quadrique Q varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

Physique.

I. Détermination de l'état hygrométrique de l'air par la méthode de condensation et par la méthode psychrométrique. Discuter ces deux méthodes et les comparer au point de vue de l'exactitude des résultats que peut fournir chacune d'elles.

II. On a proposé, pour comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur dans les différents lieux du globe, l'emploi d'un baromètre à siphon. Ce siphon serait à branches bien cylindriques; et la petite branche, renfermant un gaz sec, aurait été fermée à la lampe. Les variations de g se dédui-

raient des variations du niveau du mercure dans la petite branche.

On demande d'établir la formule : 1° dans le cas où l'instrument serait toujours ramené à une température constante; 2° dans le cas où l'observation serait faite à une température quelconque; 3° dans le cas où, au lieu d'un gaz, on aurait enfermé dans la petite branche une vapeur en contact avec un excès du liquide générateur.

Chimie.

I. Combinaisons, étudiées dans le cours, du fluor et du chlore avec les métalloïdes autres que l'oxygène et l'hydrogène.

II. On fait passer lentement du gaz oxygène pur et sec à travers un tube à effluves actionné par une forte bobine d'induction. La température est 0°, la pression 760^{mm}. Le gaz à sa sortie traverse 100^{cc} d'une dissolution d'acide arsénieux contenant $9^{gr},9$ d'acide arsénieux par litre.

Quand l'opération est terminée, on ajoute 100^{cc} d'une solution d'iode dans l'iodure de potassium à $25^{gr},4$ d'iode par litre. En supposant que l'effluve ait produit une contraction de $55^{cc},7$, on demande quel sera le volume d'une solution d'hyposulfite de soude à $31^{gr},6$ de sel anhydre par litre, qui sera nécessaire pour décolorer la solution arsénieuse additionnée d'iode.

L'équivalent du sodium est 23.

III. On décompose un poids x d'azotite d'ammoniaque en utilisant la chaleur de combustion d'un certain volume d'hydrogène dans un calorimètre convenablement disposé.

On demande de calculer ce point x d'azotite d'ammoniaque décomposé, ainsi que les poids, et, s'il y a lieu, les volumes gazeux, à 0° et 760^{mm}, des produits de sa décomposition à l'aide des données suivantes :

1° Poids de l'eau du calorimètre................	1800^{gr}
2° Poids du calorimètre évalué en eau.........	$73^{gr},5$
3° Élévation totale de température de l'eau du calorimètre.......................................	1°,393
4° Élévation de température de l'eau du calorimètre, résultant de la combustion de l'hydrogène seul, sans intervention de l'azotite d'ammoniaque.	0°,378
5° Chaleur de décomposition de 1^{gr} d'azotite d'ammoniaque.......................................	$1^{cal},25$

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

I. Soient, sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution, trois points non en ligne droite A, B, C, tels que les arcs AB et AC soient de même sens. Sur la même hélice, à partir d'un point quelconque A′ de cette courbe, on prend les arcs A′B′, A′C′, respectivement égaux aux arcs AB, AC, et tous deux de même sens que l'arc AB, ou tous deux de même sens que l'arc BA.

Démontrer que, si l'on projette orthogonalement, sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, le cercle circonscrit au triangle ABC et le cercle circonscrit au triangle A′B′C′, les deux ellipses, projections de ces cercles, sont égales.

II. Sur un cylindre de révolution on donne une hélice H et un cercle K. On donne aussi un triangle équilatéral abc, inscrit dans le cercle K. Soit un triangle ABC inscrit dans l'hélice H, tel que les trois sommets de ce triangle sont sur une même spire de l'hélice H et se projettent orthogonalement sur le plan du cercle K, aux points a, b, c. A chaque triangle ABC satisfaisant à ces conditions on fait correspondre une ellipse E, qui est la projection orthogonale, sur le plan du cercle K, du cercle circonscrit au triangle ABC :

1° Trouver le nombre des ellipses E, et, pour chacune d'elles, déterminer la droite sur laquelle est placé son grand axe.

2° Trouver le lieu des sommets de chacune des ellipses E, quand, le cylindre, l'hélice H, le cercle K restant fixes, on fait tourner le triangle équilatéral abc dans le plan du cercle K, autour du centre de ce cercle.

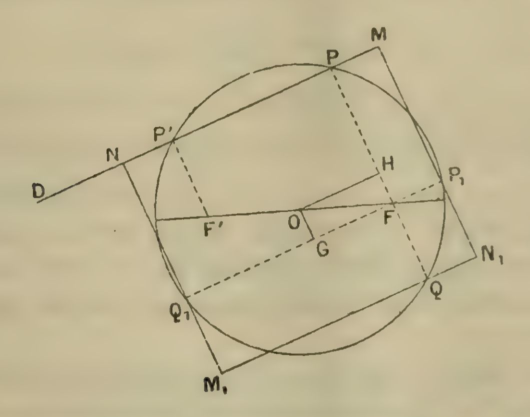
3° En général, le lieu des sommets d'une des ellipses E se compose de trois lignes distinctes; déterminer le rapport du pas de l'hélice H au rayon du cylindre de façon que deux de ces trois lignes se confondent.

III. On donne, sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution, cinq points A, B, C, D, E, tels que les quatre arcs AB, BC, CD, DE sont égaux. Démontrer que la sphère qui passe par les quatre points A, B, C, D, et la sphère qui passe par les quatre points B, C, D, E, sont symétriques par rapport au plan des trois points B, C, D.

RHÉTORIQUE.

On donne un cercle de rayon R et, à l'intérieur de cette courbe, deux points F, F', symétriquement placés par rapport au centre O.

1° Par un point P de la circonférence du cercle O, on élève sur FP une perpendiculaire D, qui rencontre cette courbe en un second point P'; démontrer que la droite F'P' est perpen-



diculaire sur D, et que le produit $FP \times F'P'$ reste constant quand le point P décrit la circonférence du cercle O.

2° On trace par le point F, dans le plan du cercle O, deux cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1, puis on élève par les extrémités P, Q de la corde PQ des perpendiculaires sur cette corde, et, par les extrémités P_1, Q_1 de la corde P_1Q_1 des perpendiculaires sur cette corde. Ces quatre perpendiculaires forment un rectangle MNM_1N_1; on demande le lieu décrit par les sommets de ce rectangle quand les deux cordes PFQ, P_1FQ_1 pivotent autour du point F en restant toujours rectangulaires.

3° Soient S l'aire du rectangle MNM_1N_1 et Σ celle du rectangle OGFH formé par les cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1 et les perpendiculaires abaissées du centre O sur chacune d'elles; les deux cordes rectangulaires PFQ, P_1FQ_1 pivotent encore autour du point F; démontrer que les aires S, Σ sont liées par la relation

$$S^2 = 16\Sigma^2 + K^2,$$

K désignant une constante.

Trouver pour quelle position des cordes PFQ. P_1FQ_1 la surface S est maximum, et pour quelle position des mêmes cordes elle est minimum.

SECONDE.

I. Résoudre les équations

$$x + y + z = 1,$$
$$x + 9y + 25z = 10a,$$
$$x + 81y + 625z = 100b.$$

Déterminer, pour les nombres a et b, des valeurs entières telles que les valeurs des inconnues soient positives.

II. On donne deux droites xx', yy', non situées dans un même plan, et sur xx' un point A, sur yy' un point B; puis on considère un plan fixe P, passant par A et B, et une droite mobile Δ parallèle à ce plan et rencontrant les droites données :

1° Si l'on désigne par C et D les points de rencontre de la droite Δ dans l'une quelconque de ses positions, avec les droites xx' et yy', démontrer que le rapport $\frac{AC}{BD}$ a une valeur constante.

2° Démontrer qu'il y a deux plans P' et P'' tels que, si le plan P coïncide avec l'un d'eux, on a constamment $\frac{AC}{BD} = 1$.

3° Soit Δ' une parallèle au plan P', rencontrant xx' en C', et yy' en D'; soit, de même, Δ'' une parallèle au plan P'', rencontrant xx' en C'' et yy' en D''. On transporte les droites Δ' et Δ'' parallèlement à elles-mêmes, de manière à amener les points C' et C'' en un point donné O; ces droites prennent les positions OM' et OM''; trouver le lieu géométrique de chacun des points M' et M'', quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent.

4° Trouver le lieu du point milieu de M'M'' quand les droites Δ' et Δ'' se déplacent en restant perpendiculaires.

TROISIÈME.

I. Trouver une fraction dont la valeur ne change pas quand on ajoute, en même temps, 20 au numérateur et 25 au déno-

minateur, sachant que les deux termes de cette fraction ont pour plus petit commun multiple le nombre 340.

II. Soit un triangle ABC; on mène les bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ et de l'angle extérieur adjacent à celui-là, lesquelles coupent le côté BC aux points D et E :

1° Démontrer que la droite AP, qui joint le point A au milieu P de DE, est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Démontrer la relation

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

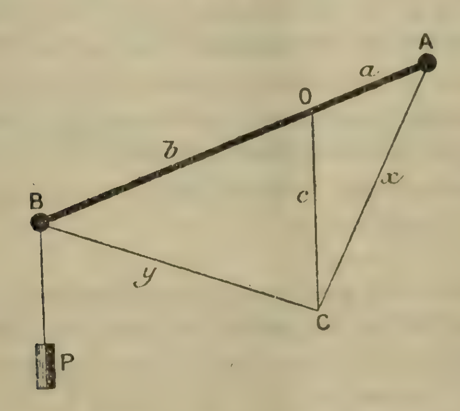
3° Construire le triangle ABC, connaissant les points B, C, D, et sachant que l'on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = m^2,$$

m désignant une longueur donnée.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Une barre rigide AB peut se mouvoir dans un plan vertical, en tournant autour d'un pivot fixé en son centre de gravité O, lequel n'est pas forcément en son milieu ; on appellera a et b les longueurs OA, OB. Un fil flexible, mais inextensible, est attaché au point A par un de ses bouts. Il va passer par un



anneau très petit, de dimensions négligeables, fixé en un point invariable C ; le fil retourne ensuite passer par un second anneau fixé au point A de la barre, puis revient passer une

deuxième fois par l'anneau C, puis une deuxième fois par l'anneau A, et ainsi de suite, de telle manière qu'entre les anneaux A et C courent $(2n+1)$ brins de fil. Le dernier brin, après avoir traversé l'anneau C, va passer par un troisième anneau fixé à la seconde extrémité B de la barre, après quoi il retombe verticalement, tendu par un poids P. On néglige toute espèce de frottement, ainsi que le poids du fil. De plus, on prend le point C sur la verticale du point O, à une distance c au-dessous de ce point.

1° Exprimer que le système proposé est en équilibre.

2° On suppose que, dans la position d'équilibre, les longueurs $CA = x$, $CB = y$ soient à a, b dans un même rapport donné K, en sorte que

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = K;$$

trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles cette condition est remplie, c étant supposé connu, ainsi que K et le nombre $(2n+1)$.

3° Prouver que, le nombre $(2n+1)$ restant fixe, le rapport K ne saurait être pris arbitrairement, et trouver les limites entre lesquelles ce rapport doit être pris.

SECONDE MODERNE.

I. Étant donné un demi-cercle de diamètre AOB, on mène la tangente en B et la droite AMN, qui rencontre la courbe en M et la tangente en N. Calculer l'angle que doit faire AM avec AB, de sorte que, en faisant tourner la figure autour de AB, le double du volume engendré par le triangle AMB soit triple du volume engendré par le triangle MNB.

Construire, au moyen de la règle et du compas, la sécante qui répond à la question.

II. Ayant tiré la ligne de terre parallèlement à l'une des dimensions de la feuille, on prend un point a, arbitraire sur la feuille, par lequel on trace deux droites quelconques : sur l'une on met les lettres D et E', sur l'autre D' et E. On considère la pyramide ayant pour sommet un point quelconque de la ligne de terre et ayant pour base l'un des losanges construits sur les droites dont les projections horizontales sont D, E, et

les projections verticales D′, E′, avec une longueur de côté égale à la hauteur du solide.

On coupe cette pyramide par le plan perpendiculaire au milieu de l'une des arêtes latérales, et l'on demande les projections du tronc ainsi déterminé.

Les faces de ce solide étant opaques (et les plans de projection étant transparents), indiquer la ponctuation de ses projections.

Figurer l'ombre propre du tronc, en supposant les rayons lumineux perpendiculaires au losange de base de la pyramide considérée.

TROISIÈME MODERNE.

I. Construire, au moyen de la règle et du compas, le décagone régulier équivalent à un triangle dont on donne les côtés.

II. Trouver la fraction équivalente à

$$\frac{321642}{234468}$$

et dans laquelle la différence des termes soit 145.

III. Les longueurs des côtés du triangle ABC étant représentées par a, b, c, calculer le produit des rayons de tous les cercles passant par deux sommets de ce triangle et tangents à l'un des côtés.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1892.

Calcul logarithmique (1 *heure*).

Résoudre un triangle connaissant

$$a = 789872, \qquad b = 807523; \qquad A = 77^\circ 33' 29'', 6.$$

On ne calculera pas la surface.

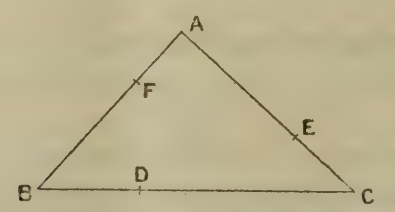
Mathématiques (2 *heures*).

I. On donne un triangle ABC rectangle en A et les perpendiculaires en B et C au plan de ce triangle; trouver sur ces perpendiculaires d'un même côté du plan ABC les points B′ et C′ tels que l'angle B′AC′ soit égal à un angle donné α et que l'aire du triangle B′AC′ ait une valeur donnée K^2.

II. On prend sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle donné ABC les points D, E, F tels qu'on ait

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = K.$$

1° Évaluer, en fonction de l'aire du triangle ABC et du rapport donné K, les aires des triangles AFE, BDF, CED et DEF,



puis suivre la variation de l'aire de ce triangle DEF, lorsque K varie.

2° En supposant toujours que K varie, trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de chaque côté du triangle DEF, et montrer que le centre de gravité de l'aire de ce triangle reste fixe.

Géométrie descriptive (2 *heures et demie*).

Un tétraèdre SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal; l'angle trièdre S est trirectangle; les côtés de la base sont

$$AB = 209^{mm}, \qquad BC = 193^{mm} \qquad \text{et} \qquad AC = 149^{mm}.$$

AB est parallèle à la ligne de terre (A à droite) et à une distance de cette ligne de 22^{mm}.

Construire l'intersection de ce tétraèdre et de la sphère qui passe par le point S et par les milieux des côtés du triangle ABC.

Pour la mise à l'encre, on représentera le solide commun à la sphère et au tétraèdre.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1894).

PROGRAMME DES QUESTIONS D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE D'OU SERA TIRÉ LE SUJET D'UNE DES COMPOSITIONS ÉCRITES.

Analyse.

Fonctions d'une variable complexe : fonctions uniformes, fonctions non uniformes. Dérivée. Intégrales.

Définition et étude des fonctions élémentaires e^z, Lz; sin$z$, cos$z$, tang$z$, cot$z$; arc sin$z$, arc cos$z$, arc tang$z$, arc cot$z$.

Intégrale d'une fonction le long d'un contour donné : pôles; résidus; points singuliers essentiels. Périodes.

Application des théorèmes généraux de Cauchy à la détermination des intégrales définies.

OUVRAGES A CONSULTER :

BRIOT et BOUQUET. — *Théorie des fonctions elliptiques.*

BERTRAND. — *Traité de Calcul différentiel et intégral.*

JORDAN. — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.*

HERMITE. — *Cours d'Analyse professé à la Faculté des Sciences de Paris;* 4e édition, Leçons VI, VII, VIII.

PICARD. — *Traité d'Analyse,* t. II, Chap. V, Sect. I, II, III; Chap. VI, Sect. I; Chap. VIII, Sect. I, II.

Mécanique.

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Outre cette question qui fait partie du cours de la licence, les candidats devront étudier les Notes XVII et XVIII insérées par M. DARBOUX dans le *Traité de Mécanique* de DESPEYROUS.

Nota. — Les candidats sont invités à s'exercer à la résolution des problèmes de Mécanique en tenant compte du frottement et du glissement.

SUJETS DE LEÇONS.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

1. Plus grand commun diviseur et plus petit multiple commun de deux ou plusieurs nombres. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)

2. Première leçon sur les nombres premiers.

3. Racine carrée. Racine carrée d'un nombre à moins de 1, à moins de $\frac{1}{n}$.

4. Polygones réguliers, convexes et concaves.

5. Calcul de π par la méthode des isopérimètres. Exposer sommairement les autres méthodes élémentaires permettant de résoudre la même question et les comparer à la méthode des isopérimètres.

6. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications.

7. Figures symétriques.

8. Figures homothétiques dans l'espace. Centre d'homothétie. Axe d'homothétie. Plan d'homothétie. Application à un système de quatre sphères.

9. Division et faisceaux en involution.

10. Sphères tangentes à quatre plans.

11. Propriétés générales des polyèdres. Théorème d'Euler; applications. Nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre.

12. Pôle et polaire par rapport à un cercle tracé sur une sphère. Axe radical de deux cercles, centre radical de trois cercles tracés sur une sphère. Applications.

13. Démontrer que toute section plane d'un cône à base circulaire peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Application à la démonstration de quelques propriétés des coniques. (Consulter les Ouvrages suivants : Chasles, *Traité des Coniques;* Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie.*)

14. Premières leçons d'Algèbre : introduction des nombres négatifs en Algèbre; opérations sur ces nombres.

15. Décomposition du trinôme $x^4 + px^2 + q$ en un produit

de facteurs réels du second degré; application à la résolution de l'équation bicarrée. (On ne supposera pas que l'équation bicarrée ait été déjà résolue par une autre méthode.)

16. Variation du quotient de deux trinômes du second degré; représentation graphique. Exemples numériques.

17. Maximum d'un produit de facteurs positifs variables dont la somme est constante. Applications.

18. Théorème des projections. Établir les formules relatives à l'addition des arcs.

19. Vitesse dans le mouvement uniforme et dans le mouvement varié. Étude du mouvement uniformément varié.

20. Composition des mouvements. Composition des vitesses. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.

21. Théorie des couples. Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre.

22. Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité et située dans un plan vertical perpendiculaire au plan incliné.

23. Balances : balance ordinaire, balance romaine, balance de Roberval.

24. Transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne. Appareils qui réalisent exactement ou approximativement cette transformation.

25. Définition et détermination de la longitude et de la latitude d'un point du globe terrestre.

26. Cartes géographiques.

27. Méthode des rabattements, des changements de plans, des rotations en Géométrie descriptive. Application.

28. Premières leçons de perspective.

II. — *Mathématiques spéciales.*

1. Première leçon sur les déterminants.

2. Résolution d'un système de n équations du premier degré à p inconnues.

3. Décomposition d'une fonction homogène du second degré de n variables en une somme de carrés de fonctions linéaires homogènes des mêmes variables. En supposant ces fonctions

linéaires indépendantes, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des carrés se réduise à $n-p$.

4. Fractions continues illimitées; fractions continues périodiques; développement des irrationnelles du second degré en fractions continues.

5. Première leçon sur les séries.

6. Définition et étude de la fonction a^x pour une valeur positive de a.

7. Série de Taylor. Application au développement de arc tang$x$ en série. Calcul de π.

8. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable. Exemples.

9. Définition de l'intégrale définie. Exemples.

10. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques, entières, rationnelles.

11. Calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique.

12. Transformation d'une équation algébrique dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples.

13. Théorème de Rolle. Applications.

14. Théorème de Sturm. Applications.

15. Méthode de M. Hermite pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique qui sont comprises entre deux limites données. (Consulter le *Cours d'Algèbre supérieure* de Serret, t. I, 4e édit., p. 985.)

16. Résolution algébrique de l'équation du quatrième degré.

17. Recherche de l'équation d'un lieu géométrique (Géométrie plane). Exemples.

18. Étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points.

19. Asymptotes d'une courbe définie par son équation en coordonnées rectilignes. (Première leçon.)

20. Recherche des sécantes communes à deux coniques. Application à la détermination du nombre de points réels ou imaginaires communs à ces courbes.

21. Équation du plan tangent à une surface définie par les équations $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$. Application aux surfaces réglées.

22. Figures polaires réciproques. Cas où la conique directrice est un cercle. Applications.

23. Classification des quadriques.

24. Étude algébrique de l'équation en S.

25. Un plan P coupe une quadrique suivant une conique à centre; former les équations des axes de cette conique et calculer les longueurs de ces axes. (On supposera que la quadrique est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.)

26. Intersection de deux quadriques dans le cas où cette ligne se décompose.

27. Définition et détermination des foyers d'une quadrique. Propriétés principales.

28. Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la section a des branches infinies. (Géométrie descriptive.)

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TRIANGULAIRES (¹);

PAR M. P. SONDAT.

45. Théorème — *Si un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *décrit la droite fixe* $X(\lambda\mu\nu)$, *et si* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *est le point harmoniquement associé à* X, *la droite* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, *harmoniquement associée à* O, *enveloppe la conique inscrite*

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

En effet, le point O appartenant à X, on a

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1,$$

ou

$$\frac{-\lambda}{-\alpha} + \frac{-\beta}{-\mu} = 1,$$

(¹) Voir même Tome, p. 360.

et, par suite,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1,$$

équation qui exprime que X_1 est une tangente à la conique inscrite que cette équation représente.

46. *Application.* — Construire la quatrième tangente commune à deux coniques inscrites.

Soient les coniques inscrites

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1.$$

Si $Y(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et $Y_1(-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1)$ sont les droites harmoniquement associées aux points $O(\alpha\beta\gamma)$ et $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, la droite $X(\lambda\mu\nu)$, harmoniquement associée au point de rencontre ω des droites Y et Y_1 sera la tangente commune cherchée.

47. Théorème. — *Si une droite* $X(\lambda\mu\nu)$ *tourne autour d'un point fixe* $O(\alpha\beta\gamma)$ *et si* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ *est la droite harmoniquement associée à* O, *le point* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, *harmoniquement associé à* X, *décrit la conique circonscrite*

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_1}{\mu_1} = 1.$$

On a, en effet,

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1$$

ou

$$\frac{-\lambda}{-\alpha} + \frac{-\beta}{-\mu} = 1$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

équation qui exprime que le point O_1 appartient à la conique circonscrite que cette équation représente.

48. *Application*. — Trouver le quatrième point de rencontre de deux coniques circonscrites.

Soient les coniques circonscrites

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1.$$

Si $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$ et $O_1(-\lambda_1, -\mu_1, -\nu_1)$ sont les points harmoniquement associés aux droites $X(\lambda\mu\nu)$ et $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, le point ω, harmoniquement associé à la droite OO_1, sera le quatrième point de rencontre des deux coniques.

49. Problème. — *Étant donnés cinq points d'une conique, mener avec la règle, les tangentes en ces points, et trouver d'autres points de la courbe.*

Soit la conique ABCDE.

Si O est le point de rencontre des droites X et Y, harmoniquement associées aux points O et E, par rapport au triangle ABC, et si une droite ρ tourne autour de O, le point ω, harmoniquement associé à ρ, décrira la conique.

De plus, si $Z(\lambda\mu\nu)$ est la droite harmoniquement associée à O, les tangentes en A, B, C seront les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$.

50. Problème. — *Étant données cinq tangentes d'une conique, trouver les points de contact et construire d'autres tangentes.*

Soit la conique tangente aux droites a, b, c, d, e.

Si X est la droite qui joint les points O et O_1, har-

moniquement associés aux droites d et e, par rapport au triangle abc, et si un point ω décrit la droite **X**, la droite ρ associée harmoniquement à ω, enveloppera la conique.

De plus, si $O_2(\alpha\beta\gamma)$ est le point harmoniquement associé à X, la conique touchera a, b, c en α, β, γ.

51. Théorème. — *Si l'on joint un point* $O(\alpha\beta\gamma)$ *de la conique circonscrite*

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1$$

aux points λ, μ, ν *par les droites* $Y(\lambda\mu_1\nu_2)$, $Z(\lambda_2\mu\nu_1)$, $U(\lambda_1\mu_2\nu)$, *on aura deux droites* $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ *et* $X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ *enveloppant les* cubiques

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\mu_1} + \frac{\nu}{\nu_1} = 3, \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda} + \frac{\mu_2}{\mu} + \frac{\nu_2}{\nu} = 3,$$

inscrites à ABC.

Si, en effet, on écrit que les droites Y, Z, U passent par le point O de la conique, on trouve

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\alpha\mu}{\beta}, & \mu_1 = \dfrac{\nu\beta}{\gamma}, & \nu_1 = \dfrac{\lambda\gamma}{\alpha}; \\ \lambda_2 = \dfrac{\nu\alpha}{\gamma}, & \mu_2 = \dfrac{\lambda\beta}{\alpha}, & \nu_2 = \dfrac{\mu\gamma}{\beta}. \end{cases}$$

On a donc

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = 1, \qquad \lambda_2\mu_2\nu_2 = 1,$$

et, par suite, les droites

$$X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1), \qquad X_2(\lambda_2\mu_2\nu_2).$$

D'ailleurs, en s'aidant des équations de la conique, on a

$$\sum\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right) = 3, \qquad \sum\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right) = 3.$$

Les droites X_1 et X_2 sont donc tangentes aux cubiques que ces équations représentent.

52. Théorème. — *Si l'on mène une tangente* $X(\lambda\mu\nu)$ *à la conique inscrite*

$$\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,$$

coupant les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *aux points* $I(\alpha\beta_1\gamma_2)$, $H(\alpha_2\beta\gamma_1)$, $K(\alpha_1\beta_2\gamma)$, *les points* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *et* $O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ *décriront les cubiques*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}+\frac{\beta_1}{\beta}+\frac{\gamma_1}{\gamma}=3, \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}+\frac{\beta}{\beta_2}+\frac{\gamma}{\gamma_2}=3,$$

circonscrites à ABC.

Si, en effet, on écrit que les points I, H, K appartiennent à la tangente X, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1=\dfrac{\lambda\beta}{\mu}, & \beta_1=\dfrac{\mu\gamma}{\nu}, & \gamma_1=\dfrac{\nu\alpha}{\lambda}; \\ \alpha_2=\dfrac{\lambda\gamma}{\nu}, & \beta_2=\dfrac{\mu\alpha}{\lambda}, & \gamma_2=\dfrac{\nu\beta}{\mu}. \end{array}\right.$$

On a donc

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1=-1, \qquad \alpha_2\beta_2\gamma_2=-1,$$

et, par suite, les points

$$O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \quad \text{et} \quad O_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2).$$

D'ailleurs, en s'aidant des équations de la conique, on a

$$\sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)=3, \qquad \sum\left(\frac{\alpha}{\alpha_2}\right)=3.$$

Les points O_1 et O_2 décrivent donc les cubiques que ces équations représentent.

53. Théorème. — *Si trois triangles sont placés de telle sorte que chacun d'eux soit inscrit dans l'un des deux autres et circonscrit au troisième, et si de plus deux d'entre eux sont homologiques, ils le sont tous les trois deux à deux et le centre d'homologie de deux quelconques d'entre eux appartient à l'axe d'homologie du troisième et de celui des deux premiers qui est inscrit dans l'autre. La conique inscrite dans chacun de ces triangles aux sommets du triangle inscrit touche l'axe d'homologie du premier de ces triangles et du troisième au centre que cet axe contient.*

Soit le point $O(\alpha\beta\gamma)$. Menons $A\lambda$ qui coupe $\alpha\gamma$ en B_1 et $\alpha\beta$ en C_1. On a

$$\left\{\begin{array}{llll} B_1, & \lambda, & \dfrac{\beta(\alpha-\lambda)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}; \\ C_1, & \lambda, & \dfrac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\alpha-\lambda)}. \end{array}\right.$$

Les droites BC_1 et B_1C se coupent au point

$$A_1, \quad -\lambda, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)},$$

qui appartient à $\beta\gamma$, et les trois triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ et $A_1B_1C_1$ sont placés comme l'indique l'énoncé.

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au point

$$O_1, \quad -\lambda, \quad \frac{\beta(\alpha-\lambda)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\alpha-\lambda)},$$

qui appartient à la droite

$$X(-\alpha, -\beta, -\gamma),$$

et l'on a les systèmes homologiques

$$(\text{centre } O)\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right|(\text{axe } X), \qquad O_1\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{array}\right|X_1.$$

Les coordonuées de l'axe X_1 sont, d'ailleurs,

$$X_1 : \quad \lambda, \quad \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}.$$

Comme on a

$$\left\{\begin{array}{llll} A_1\alpha : & \alpha, & \dfrac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda+\alpha}, & \dfrac{\lambda+\alpha}{\alpha\beta(\lambda-\alpha)}, \\ B_1\beta : & 2\lambda-\alpha, & \beta, & \dfrac{1}{\beta(2\lambda-\alpha)}, \\ C_1\gamma : & \dfrac{\alpha\lambda}{2\alpha-\lambda}, & \dfrac{\beta(\lambda-2\alpha)}{\lambda}, & \gamma, \end{array}\right.$$

les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$, $C_1\gamma$ sont concourantes au point

$$O_2 : \quad \frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)2}{\lambda^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta(\lambda-\alpha)^2},$$

qui appartient à X_1.

On a alors le système homologique

$$O_2 \left| \begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right| X_2.$$

Si l'on appelle I, H, K les points $(B_1C_1, \beta\gamma)$, $(A_1C_1, \alpha\gamma)$, $(A_1B_1, \alpha\beta)$, qui fixent l'axe X_2, on a, pour leurs coordonnées,

$$\left\{\begin{array}{llll} I : & \lambda, & \dfrac{\beta(\lambda+\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{-1}{\beta(\lambda+\alpha)}, \\ H : & \dfrac{\alpha\lambda}{2\lambda-\alpha}, & \dfrac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{\gamma(2\lambda-\alpha)}{\lambda-\alpha}, \\ K : & 2\alpha-\lambda, & \dfrac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda-2\alpha}, & \dfrac{1}{\beta(\lambda-\alpha)}, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$X_2 : \qquad \frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\beta\lambda}{\lambda-\alpha}, \quad \frac{-\gamma(\lambda-\alpha)}{\alpha}.$$

Le point O appartient donc à X_2.

La conique inscrite à ABC en α, β, γ a pour équation, en coordonnées tangentielles,

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

les coordonnées du point de contact étant

$$\frac{\lambda_1^2}{\alpha}, \quad \frac{\mu_1^2}{\beta}, \quad \frac{\nu_1^2}{\gamma}.$$

Or la droite X_1 satisfait à cette équation et O_2 est le point de contact.

Il résulte d'ailleurs de la position symétrique des trois triangles qu'il doit y avoir :

Une seconde conique touchant les côtés de $A_1 B_1 C_1$ en A, B, C et la droite X_2 en O;

Une troisième conique touchant les côtés de $\alpha\beta\gamma$ en A_1, B_1, C_1 et la droite X en O_1.

Remarque. — Si O est le centre de gravité de ABC, la droite X passe à l'infini, et la troisième conique est une parabole.

54. Théorème. — *Si les perpendiculaires abaissées d'un point donné* $O(\alpha\beta\gamma)$, *sur les droites* O_1A, O_1B, O_1C *coupent les côtés* BC, CA, AB *en trois points situés sur une droite* $X(\lambda\mu\nu)$, *le lieu géométrique du point* $O_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ *est (avec la droite à l'infini) la conique passant par les points* A, B, C, O, *et l'ortho-*

centre $O'(\alpha'\beta'\gamma')$ *de* ABC, *et l'enveloppe de la droite* X *est une parabole inscrite à* ABC.

Posons, pour abréger,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
P &= \beta c \cos A + a \cos C,\\
Q &= \gamma a \cos B + b \cos A,\\
R &= \alpha b \cos C + c \cos B,\\
P' &= \beta c - a \cos B,\\
Q' &= \gamma a - b \cos C,\\
R' &= \alpha b - c \cos A,\\
P_1 &= b - \gamma a \cos C,\\
Q_1 &= c - \alpha b \cos A,\\
R_1 &= a - \beta c \cos B.
\end{aligned}\right.$$

D'où les égalités

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
&(cP' - \alpha b P) + (aR - \beta c Q_1) = 0,\\
&(aQ' - \beta c Q) + (bP - \gamma a R_1) = 0,\\
&(bR' - \gamma a R) + (cQ - \alpha b P_1) = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
R' &= \alpha(\gamma P + P_1),\\
P' &= \beta(\alpha Q + Q_1),\\
Q' &= \gamma(\beta R + R_1),
\end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
a(QR - Q'Q_1) &= b(QR' + P_1 Q_1),\\
b(PR - R'R_1) &= c(RP' + Q_1 R_1),\\
c(PQ - P'P_1) &= a(PQ' + P_1 R_1),
\end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
bP &= cP' + aR_1,\\
cQ &= aQ' + bP_1,\\
aR &= bR' + cQ_1,\\
PQR &= P'Q'R' + P_1 Q_1 R_1\\
&\quad + PQ'Q_1 + QR'R_1 + RP'P_1,
\end{aligned}\right.$$

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
&-\frac{P'R' + PQ_1}{\sin A} = \frac{\alpha(PQ' + QR_1)}{\sin B} = \frac{Q'R' + RP_1}{\gamma \sin C}\\
&= \frac{P_1 Q_1 + QR'}{\gamma \sin A} = -\frac{Q_1 R_1 + RP'}{\sin B} = \frac{\alpha(P_1 R_1 + PQ')}{\sin C}\\
&= -4\rho^2(\alpha\beta - \alpha + 1)\sin A \sin B \sin C,
\end{aligned}\right.$$

ρ étant le rayon du cercle ABC.

En écrivant que la droite $O\lambda$ doit passer par O et être perpendiculaire à $O_1 A(\alpha_1 \infty 0)$, et procédant de même pour $O\mu$ et $O\nu$, on aura (4) et (23)

$$(49)\quad \begin{cases} \beta\lambda = \dfrac{cP' - \alpha_1 bP}{cQ - \alpha_1 bP_1}, \\ \gamma\mu = \dfrac{aQ' - \beta_1 cQ}{aR - \beta_1 cQ_1}, \\ \alpha\nu = \dfrac{bR' - \gamma_1 aR}{bP - \gamma_1 aR_1}. \end{cases}$$

Pour que les points λ, μ, ν soient en ligne droite, il faut que $\lambda\mu\nu = 1$, ou, en utilisant les égalités (46) et (47),

$$\begin{aligned} &b^2 P[c(1+\alpha_1\beta_1)(QR' + P_1 Q_1) - \alpha_1 a(Q'R' + P_1 R)] \\ &+ c^2 Q[a(1+\beta_1\gamma_1)(RP' + Q_1 R_1) - \beta_1 b(P'R' + PQ_1)] \\ &+ a^2 R[b(1+\alpha_1\gamma_1)(PQ' + P_1 R_1) - \gamma_1 c(P'Q' + QR_1)] = 0, \end{aligned}$$

ou (48)

$$(50)\quad (\alpha\beta - \alpha + 1)(\alpha_1\beta_1 - \alpha_1 + 1)\left(-\frac{bP}{\beta}\alpha_1 + \frac{aR}{\beta_1} + \alpha c Q\right) = 0.$$

Cette condition sera remplie si

$$\frac{1}{\alpha} + \beta = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\alpha_1} + \beta_1 = 1,$$

c'est-à-dire (5) si l'un des points O et O_1 est à l'infini, quelle que soit la position de l'autre.

En écartant ce cas particulier, $\lambda\mu\nu$ sera une droite si le point variable O_1 est lié au point fixe O par l'équation

$$(51)\quad -\frac{bP}{\beta}\alpha_1 + \frac{aR}{\beta_1} + \alpha c Q = 0.$$

Cette équation se réduit à une identité si

$$P = Q = R = 0,$$

c'est-à-dire si O se confond avec O'.

L'équation (51), mise sous la forme

$$\frac{a}{\beta}(c\cos B + \alpha_1 b\cos C) - \alpha b\left(c\cos A + \frac{a}{\beta_1}\cos C\right) - c\left(\alpha_1 b\cos A - \frac{a}{\beta_1}\cos B\right) = 0,$$

nous montre qu'elle serait satisfaite si O_1 se confondait avec O'.

L'équation (51) peut encore s'écrire

$$(\alpha - \alpha_1)\cot A + \frac{1}{\beta\beta_1}(\beta - \beta_1)\cot B + \alpha\alpha_1(\alpha - \alpha_1)\cot C = 0,$$

et se trouve vérifiée si O_1 se porte en O.

De plus, comme les points O et O_1 y entrent symétriquement, les perpendiculaires abaissées de O_1 sur OA, OB, OC doivent couper BC, CA, AB en trois points aussi en ligne droite.

En résumé, si O n'est ni l'orthocentre ni à l'infini, sur toute droite L passant par O, il existe trois points pour lesquels $\lambda\mu\nu$ est une droite : le point O lui-même, le point à l'infini sur L et un troisième lié à O par l'équation (51).

Cherchons le lieu que cette équation représente.

En posant

$$\lambda_1 = -\frac{cQ}{\gamma b P}, \qquad \mu_1 = \frac{-aR}{\alpha c Q}, \qquad \nu_1 = -\frac{bP}{\beta a R},$$

d'où

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = +1.$$

l'équation (51) prendra la forme

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta_1} = 1.$$

Elle représente donc (41) une conique tangente en A, B, C aux droites $A\lambda_1$, $B\mu_1$, $C\nu_1$ et passant par O et O'.

D'après (49), la droite $X_1(\lambda_1 \mu \nu_1)$ est harmoniquement associée au point de rencontre ω des droites

$$Y(-\alpha, -\beta, -\gamma)$$

et

$$Y'(-\alpha', -\beta', -\gamma'),$$

qui sont elles-mêmes harmoniquement associées aux points O et O'.

Cette droite X_1 (46) est la quatrième tangente commune aux coniques inscrites à ABC en α, β, γ et α', β', γ'.

Cherchons maintenant l'enveloppe de X.

Les relations (49) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c}{b}\,\frac{P' - \beta\lambda Q}{P - \beta\lambda P_1}, \\ \beta_1 &= \frac{a}{c}\,\frac{Q' - \gamma\mu R}{Q - \gamma\mu Q_1}, \\ \gamma_1 &= \frac{b}{a}\,\frac{R' - \alpha\nu P}{R - \alpha\nu R_1}. \end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans (51) et développant à l'aide de (45), on aura

$$\frac{P}{\beta}(P'Q' + QR_1) + \lambda\beta Q(Q'R' + P_1 R) - \frac{\lambda\mu\gamma R}{\alpha}(P'R' + PQ_1) = 0,$$

ou (48)

$$(\alpha\beta - \alpha + 1)\left(-bP + \lambda\beta c Q + \frac{\lambda\mu a R}{\alpha}\right) = 0.$$

Avec

$$\frac{1}{\alpha} + \beta = 1,$$

le point O serait à l'infini, et X resterait indéterminée.

En écartant ce cas, on doit avoir

$$(52) \qquad -bP + \lambda\beta c Q + \frac{\lambda\mu a R}{\alpha} = 0.$$

Cette équation devient identique si $P = Q = R = 0$, ou si O se confond avec O'.

Si l'on pose

$$\alpha_2 = \frac{bP}{\beta c Q}, \qquad \beta_2 = \frac{cQ}{\gamma a R}, \qquad \gamma_2 = \frac{aR}{\alpha b P},$$

d'où

$$\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = -1,$$

l'équation (52) prendra la forme

$$(53) \qquad \frac{\alpha_2}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_2} = 1,$$

c'est-à-dire (43) que l'enveloppe de X est une conique tangente aux côtés a, b, c en α_2, β_2, γ_2.

Cette conique est, d'ailleurs, une parabole, car son équation (52) est vérifiée par $\lambda = \mu = \nu = 1$, puisqu'elle se réduit à l'identité

$$aR = \alpha(bP - \beta c Q).$$

Quand le point O_1 se porte en O, la droite X devient

$$X_2 : \quad \frac{cP' - \alpha b P}{\beta(cQ - \alpha b P_1)}, \quad \frac{aQ' - \beta c Q}{\gamma(aR - \beta c Q_1)}, \quad \frac{bR' - \gamma a R}{\alpha(bP - \gamma a R_1},$$

et cette droite est tangente à la parabole.

D'après (50), si $C(-1, -1, -1)$ et C_1 sont les points harmoniquement associés à la droite à l'infini et à X_2, le point $O_2(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ sera harmoniquement associé à CC_1.

Ce point O_2 (48) est le quatrième point de rencontre des coniques circonscrites à ABC, selon la droite à l'infini et X_2.

54. Problème. — *Étant données les coordonnées normales d'un point* $O(xyz)$, *trouver celles du point isogonal* $O_1(x_1 y_1 z_1)$.

Si α', β', γ' sont les coordonnées angulaires de O, on a (5)

$$\alpha' = \frac{y}{z}, \qquad \beta' = \frac{z}{x}, \qquad \gamma' = \frac{x}{y}.$$

Pour le point O_1, on a

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{y_1}{z_1}, \qquad \frac{1}{\beta'} = \frac{z_1}{x_1}, \qquad \frac{1}{\gamma'} = \frac{x_1}{y_1};$$

d'où

$$xx_1 = yy_1 = zz_1,$$

et comme

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S,$$

on aura

$$xx_1 = yy_1 = zz_1 = \frac{2S}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}.$$

Si O appartient au cercle circonscrit, le dénominateur est nul (21), et O_1 est à l'infini.

55. Théorème. — *Si un point* $O(\alpha'\beta'\gamma')$ *décrit une droite* $X(\lambda'\mu'\nu')$, *le point* $O_1(\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1)$, *isogonal de* O, *décrit la conique circonscrite à* ABC *selon la droite* $X_1(\lambda'_1\mu'_1\nu'_1)$, *isogonale de* X.

On a, en effet, en coordonnées angulaires (4),

$$\frac{\alpha'}{\lambda'} + \frac{\mu'}{\beta'} = 1,$$

ou

(54) $$\frac{1}{\lambda'} : \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} : \frac{1}{\mu'} = 1, \qquad \frac{\lambda'_1}{\alpha'_1} + \frac{\beta'_1}{\mu'_1} = 1,$$

Donc O_1 décrit la conique que cette équation représente en coordonnées ponctuelles et angulaires (43).

Si X passe à l'infini

$$\lambda' = -\frac{c}{b}, \qquad \mu' = -\frac{a}{c}, \qquad \nu' = -\frac{b}{a},$$

et l'équation, qui devient

$$a\beta'_1 + \frac{b}{\alpha'_1} + c = 0,$$

est celle du cercle circonscrit (21).

56. Théorème. — *Si une droite* X $(\lambda' \mu' \nu')$ *tourne autour d'un point fixe* O $(\alpha' \beta' \gamma')$, *la droite* $X_1 (\lambda'_1 \mu'_1 \nu'_1)$, *isogonale de* X, *enveloppe la conique inscrite à* ABC *selon le point* $O_1 (\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1)$, *isogonal de* O.

Même démonstration. La droite X_1 enveloppe ici la conique inscrite que l'équation (54) représente en coordonnées tangentielles et angulaires.

Si O est le centre de gravité,

$$\alpha' = \frac{c}{b}, \qquad \beta' = \frac{a}{c}, \qquad \gamma' = \frac{b}{a},$$

et l'équation devient

$$\frac{\lambda'_1}{\frac{b}{c}} + \frac{\frac{c}{a}}{\mu'_1} = 1.$$

Dans ce cas, O_1 est le point de Lemoine.

57. *Équation en coordonnées tangentielles de la conique circonscrite.* — Soit la conique

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1$$

circonscrite à ABC selon la droite X $(\lambda\mu\nu)$.

Coupons-la par la droite $X_1 (\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1.$$

L'élimination de β entre ces deux équations donne

$$\alpha^2 - \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)\alpha + \lambda\lambda_1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales si

$$(55) \qquad \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)^2 - 4\lambda\lambda_1 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \pm\sqrt{\lambda\lambda_1}.$$

On voit par là que si λT est la seconde tangente issue de λ, la droite AT rencontre BC au point $-\lambda$, conjugué harmonique de λ sur BC.

L'équation (55) est en coordonnées tangentielles celle de la conique circonscrite, et les coordonnées de la tangente $X_1(\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1)$ au point $O(\alpha\beta\gamma)$ sont

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\beta^2}{\mu}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu}.$$

58. Si, au théorème 51, on cherche le point de rencontre $O_1(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ des droites X_1 et X_2, on trouve

$$(56) \qquad \alpha_1 = -\frac{\alpha^2}{\lambda}, \qquad \beta_1 = -\frac{\beta^2}{\mu}, \qquad \gamma_1 = -\frac{\gamma^2}{\nu}.$$

Or, si $X_3(\lambda_3\,\mu_3\,\nu_3)$ est la tangente à la conique au point O, on a (57)

$$\lambda_3 = \frac{\alpha^2}{\lambda}, \qquad \mu_3 = \frac{\beta^2}{\mu}, \qquad \nu_3 = \frac{\gamma^2}{\nu}.$$

Donc, quand le point O décrit la conique, le point O_1 demeure harmoniquement associé à la tangente X_3 au point mobile.

Si l'on appelle $O'(\alpha'\,\beta'\gamma')$ le point harmoniquement associé à $X(\lambda\mu\nu)$, le lieu du point O_1 s'obtiendra en portant dans l'équation de la conique les valeurs

de α et de β fournies par (56). On trouve ainsi la *quartique*

(57) $$\pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha'}}\pm\sqrt{\frac{\beta'}{\beta_1}}=1.$$

Si la droite X passe à l'infini, on aura la solution de la question 1419, proposée par M. Poujade dans les *Nouvelles Annales* et résolue par M. Barisien (octobre 1893, p. 55*).

59. De même, si, au théorème 52, on cherche la droite O_1O_2, soit $X_1(\lambda_1\mu_1\nu_1)$, on trouve

$$\lambda_1=-\frac{\lambda^2}{\alpha},\qquad \mu_1=-\frac{\mu^2}{\beta},\qquad \nu_1=-\frac{\nu^2}{\gamma}.$$

Or, si $O_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ est le point de contact de la tangente X à la conique, on a (39)

$$\alpha_3=\frac{\lambda^2}{\alpha},\qquad \beta_3=\frac{\mu^2}{\beta},\qquad \gamma_3=\frac{\nu^2}{\gamma}.$$

Donc, quand la tangente X se meut, la droite X_1 demeure harmoniquement associée au point de contact O_3.

Si l'on appelle $X'(\lambda'\mu'\nu')$ la droite harmoniquement associée au point $O(\alpha\beta\gamma)$, la droite X_1 enveloppera la quartique

(59) $$\pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda_1}}\pm\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu'}}=1,$$

dont l'équation s'obtient en portant dans celle de la conique les valeurs de λ et de μ fournies par (58).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893 (DEUXIÈME SESSION). SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (¹);

Par M. AUDIBERT.

1° Les deux droites

$$(1) \qquad \lambda(y-b)^2+(x-a)^2=0,$$

de direction $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}$, se coupant au point fixe (a, b) centre commun aux coniques Δ, on aura, pour déterminer les coefficients des coniques tangentes à l'axe des x,

$$x^2+2mxy+2Dx+2Ey+D^2=0,$$

les relations

$$C=-\lambda,$$
$$a+mb+D=0,$$
$$ma-\lambda b+E=0;$$

d'où résultera l'équation

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x^2+2mxy-\lambda y^2-2(a+mb)x \\ \qquad -2(ma-\lambda b)y+(a+mb)^2=0. \end{cases}$$

On voit qu'elle est du second degré en m; on en conclut que par chaque point (x, y) du plan passent deux coniques Δ réelles ou imaginaires.

2° En particulier, pour celles passant par le point (o, q), les deux paramètres m' et m'' seront racines de

$$b^2m^2-2a(q-b)m+a^2-\lambda q(q-2b)=0.$$

(¹) *Voir* l'énoncé p. 352.

On en tire

$$(2)\quad m' + m'' = \frac{2a(q-b)}{b^2}, \qquad m'm'' = \frac{a^2 - \lambda q(q-2b)}{b^2}.$$

Les polaires de l'origine relatives à ces deux coniques ont respectivement pour équations

$$2(a + m'b)x + 2(m'a - \lambda b)y - (a + m'b)^2 = 0,$$
$$2(a + m''b)x + 2(m''a - \lambda b)y - (a + m''b)^2 = 0.$$

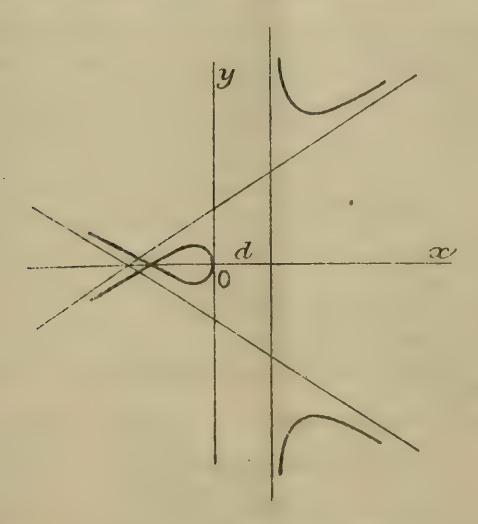
En les combinant avec (2), on éliminera m' et m'', et, pour déterminer les coordonnées du point de rencontre de ces deux polaires, on aura les égalités

$$bx + ay = q,$$
$$2ax - a\lambda by = \lambda q(q - 2b).$$

Le lieu de ces points, quand on fait varier q, est la parabole

$$(P)\qquad \lambda(bx + ay)^2 - 2ax(a^2 + \lambda b^2) = 0.$$

Quelle que soit la valeur de λ, les courbes P touche-



ront l'axe des y à l'origine, leurs diamètres auront la direction fixe $\frac{-b}{a}$, et celui d'entre eux qui est conjugué à cet axe demeure invariable.

3° Cherchons le lieu des points de contact avec (P) des tangentes de direction $\frac{a}{\lambda b}$, λ étant fixe, a et b variables, mais liés par la relation

$$a = pb^2.$$

Soient x et y les coordonnées d'un de ces points, on aura

$$-\frac{\lambda(bx + ay)b - a(a^2 + \lambda b^2)}{\lambda(bx + ay)a} = \frac{a}{\lambda b}.$$

L'élimination de a et de b entre les trois relations qui précèdent donne

$$y = \pm \frac{\lambda + 2px}{\sqrt{2\lambda p}} \sqrt{\frac{x}{\lambda - 2px}}$$

et, en posant

$$\lambda = 2pd,$$

$$y = \pm \frac{d + x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{x}{d - x}}.$$

Rappelons que les droites (1) ne sont réelles qu'à la condition que λ soit négatif et faisons $\lambda = -\lambda_1$, l'équation

$$y = \pm \frac{d + x}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\frac{x}{x - d}}$$

représentera la courbe cherchée.

Elle a un nœud au point $y = 0$, $x = -d$, et possède trois asymptotes

$$x = d, \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(x + \frac{3}{2} d\right).$$

Nota. — Solution analogue par M. J. Sala.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE [1]

(TOME XII, 3e SÉRIE).

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations.

B. — Déterminants; élimination; théorie des formes; quantités complexes.

D. — Théorie des fonctions; séries.

[1] Les indications en caractères gras placées à la suite du numéro d'ordre correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

H. — Équations différentielles.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires; systèmes de coordonnées; Géométrie descriptive.

L. — Courbes et surfaces du second degré.

M. — Courbes et surfaces algébriques et transcendantes.

N. — Complexes et congruences.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique.

P. — Transformations géométriques.

Q. — Géométrie non euclidienne.

R. — Mécanique.

T. — Physique mathématique.

V. — Philosophie et histoire des Mathématiques.

X. — Nomographie.

MÉLANGES.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME XII, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

19001 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1649. On donne une ellipse; on prend le triangle abc formé par les deux tangentes ca, cb à cette courbe et par la corde de contact ab. Sur les côtés de ce triangle comme diamètres, on décrit des sphères; elles se coupent en deux points, réels ou imaginaires :

1° Quel est le lieu (m) de ces points lorsqu'on déplace ab parallèlement à la même direction;

2° Quel est le lieu des lignes (m) lorsqu'on fait varier la direction de ab [1]. (MANNHEIM.)

1650. Soient S une surface telle que les lignes de courbure d'un système soient circulaires, (γ) l'un de ces cercles et G le sommet du cône circonscrit à S le long de (γ). Démontrer que la trajectoire du point G est normale au plan déterminé par ce point et par la caractéristique du plan du cercle (γ).

(CARONNET.)

1651. Deux permutations des n premiers nombres sont dites *inverses* l'une de l'autre lorsqu'elles présentent les mêmes éléments en ordre exactement inverse; elles sont dites *symétriques* l'une de l'autre lorsque la somme des éléments qui y occupent la même place est constamment égale à $n+1$. Démontrer que la probabilité, pour qu'une permutation prise au hasard parmi les permutations des n premiers nombres soit telle que son inverse et sa symétrique coïncident, est donnée par la formule

$$p = \frac{1}{1.3.5\ldots i},$$

i étant le plus grand entier impair non supérieur à n.

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

---

[1] Voir LAISANT, *Recueil de problèmes de Géométrie analytique à deux dimensions*, p. 184, n° 721, un énoncé plus concis de cette même question.

1652. Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a, b, c, d tels que les dix nombres

$$a+b-1,\quad a+c-1,\quad a+d-1,$$
$$b+c-1,\quad b+d-1,\quad c+d-1,$$
$$2-b-c-d,\quad 2-c-d-a,$$
$$2-d-a-b,\quad 2-a-b-c$$

soient les inverses de nombres entiers. (LEVAVASSEUR.)

1653. C étant le cercle osculateur en un point M d'une parabole, démontrer géométriquement que le foyer divise dans le rapport de 1 à 3 la droite MD, D étant le symétrique par rapport à la normale en M du point où le cercle C rencontre le diamètre de la parabole relatif au point M. (E. ROUCHÉ.)

1654. On considère un triangle équilatéral ABC et une droite (D) passant par le centre O du triangle. Par le point A on mène une droite (Δ) symétrique par rapport à la direction (D) de la droite perpendiculaire en A à AO; de même en B, on mène la droite (Δ)′ symétrique par rapport à la même direction (D) de la perpendiculaire en B à BO ; on agit de même en C pour construire la droite (Δ)″.

Montrer que ces trois droites (Δ), (Δ)′, (Δ)″ se rencontrent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC. (E.-N. BARISIEN.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1385.

On donne sur un plan une ellipse de centre O *et un point fixe* C. *De ce point, on mène une transversale qui rencontre l'ellipse au point* P. *Le diamètre conjugué de* OP *coupe la transversale au point* M.

Pour quelles directions de la tranversale le segment PM *est-il maximum ou minimum?* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. Lez.

La transversale $y - p = \mu(x - q)$ menée par le point $C(p, q)$ rencontre l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en deux points P, P' ayant pour coordonnées

$$x = \frac{a^2\mu(p\mu - q) \pm ab\sqrt{K}}{b^2 + a^2\mu^2},$$

$$y = \frac{b^2(q - p\mu) \pm ab\mu\sqrt{K}}{b^2 + a^2\mu^2},$$

K, du reste, étant égal à $b^2 + a^2\mu^2 - (q - p\mu)^2$.

Par suite, le diamètre OM conjugué de OP a pour équation

$$\frac{y}{x} = -\frac{b\left[a\mu(p\mu - q) + b\sqrt{K}\right]}{a\left[b(q - p\mu) + a\mu\sqrt{K}\right]};$$

il rencontre la transversale en un point M représenté par

$$x = \frac{a(p\mu - q)\left[b(q - p\mu) + a\mu\sqrt{K}\right]}{(b^2 + a^2\mu^2)\sqrt{K}},$$

$$y = \frac{b(q - p\mu)\left[-a\mu(q - p\mu) + b\sqrt{K}\right]}{(b^2 + a^2\mu^2)\sqrt{K}}.$$

La différence des abscisses des points P et M étant $\frac{ab}{\sqrt{K}}$ et celle des ordonnées $\frac{ab\mu}{\sqrt{K}}$, la longueur du segment PM sera

$$L = ab\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{b^2 + a^2\mu^2 - (q - p\mu)^2}}.$$

Pour que L devienne maximum ou minimum, il faut que la dérivée de la quantité sous le radical, c'est-à-dire que μ satisfasse à l'équation

(1) $$\mu^2 - (a^2 - b^2 + q^2 - p^2)\frac{\mu}{pq} - 1 = 0,$$

dont les racines sont inverses et de signes contraires.

A la valeur positive de μ correspond le minimum de L. Les

deux transversales passant par le point C et ayant pour coefficients angulaires les racines de l'équation (1) sont les bissectrices des tangentes menées à l'ellipse par le même point C.

En effet, l'équation des parallèles menées par l'origine à ces tangentes est

$$(a^2-p^2)y^2+2pqxy+(b^2-q^2)x^2=0;$$

or les bissectrices des angles de celles-ci ont pour coefficients angulaires les racines de l'équation (1).

Quand le point C est sur l'ellipse, l'une des bissectrices devient la normale en ce point, et l'autre, la tangente; le segment intercepté $L=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^4q^2+b^4p^2}}$ est un minimum. Lorsque le point C est à l'intérieur de l'ellipse, les tangentes sont imaginaires, mais leurs bissectrices sont réelles.

N. B. — M. Cartier a aussi résolu la question.

Question 1624.

Soit une série $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *dans laquelle les coefficients* a *sont positifs; on suppose qu'on ait* $\lim\limits_{n=\infty} a_n n^p = K$, K *étant une quantité constante différente de* 0 *et* p *un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque* x *tend vers* 1, *le produit* $(1-x)^{1-p}F(x)$ *a pour limite* $K\Gamma(1-p)$. (Appell.)

SOLUTION

Par M. Soudée.

La série n'est convergente que si x est plus petit que 1; nous supposerons donc que x tende vers 1 par valeurs moindres.

On peut poser, par hypothèse, $a_n=\dfrac{K}{n^p}+\dfrac{\varepsilon_n}{n^p}$, en ayant pour limite 0 quand n augmente indéfiniment; et la série peut se décomposer ainsi

$$F(x)=a_0+K\left(\frac{x}{1^p}+\frac{x^2}{2^p}+\ldots+\frac{x^n}{n^p}+\ldots\right)$$
$$+\left(\varepsilon_1\frac{x}{1^p}+\varepsilon_2\frac{x^2}{2^p}+\ldots+\varepsilon_n\frac{x^n}{n^p}+\ldots\right).$$

Comparons la série

$$\varphi(x) = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \ldots$$

avec l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x^n}{n^p}\, dn;$$

et remarquons d'abord que celle-ci s'exprime par la fonction Γ; car

$$I = \int_0^\infty x^n n^{-p}\, dn = \int_0^\infty n^{(1-p)-1} e^{-n\log\frac{1}{x}}\, dn = \frac{\Gamma(1-p)}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1-p}}.$$

$\frac{x^n}{n^p}$ est une fonction de n décroissante; car sa dérivée est

$$\frac{x^n}{n^{p+1}}(n\log x - p),$$

et $\log x$ est négatif puisque x est moindre que 1. Si donc on désigne par m un entier quelconque, on aura la double inégalité

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)^p} < \int_m^{m+1} \frac{x^n}{n^p}\, dn < \frac{x^m}{m^p}.$$

Si l'on donne à m toutes les valeurs entières à partir de 1 et qu'on ajoute, comme la série $\varphi(x)$ est convergente, on obtient

$$\varphi(x) - x < \int_1^\infty \frac{x^n}{n^p}\, dn < \varphi(x)$$

ou

$$\varphi(x) - x < I - \int_0^1 \frac{x^n}{n^p}\, dn < \varphi(x).$$

Le produit $(1-x)^{1-p}\int_0^1 \frac{x^n}{n^p}\, dn$ a pour limite 0 quand x tend vers 1; il en est de même de $x(1-x)^{1-p}$.

Le produit $I(1-x)^{1-p}$ ou $\Gamma(1-p)\left(\frac{1-x}{\log\frac{1}{x}}\right)^{1-p}$ a pour limite $\Gamma(1-p)$. Donc

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^{1-p}\varphi(x)\right] = \Gamma(1-p).$$

Dans l'expression de $F(x)(1-x)^{1-p}$, la première partie $a_0(1-x)^{1-p}$ a pour limite o; je dis qu'il en est de même de la troisième. Soit ε un nombre donné; on peut déterminer un entier m tel que si n est supérieur à m, ε_n est moindre que ε. Décomposons la série en deux parties : la première, composée des m premiers termes, reste finie quand x tend vers 1; son produit par $(1-x)^{1-p}$ a pour limite o; la seconde est moindre que $\varepsilon\left[\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^p}+\ldots\right]$ en valeur absolue; elle est moindre que $\varepsilon\varphi(x)$ à plus forte raison; et son produit par $(1-x)^{1-p}$ a une limite inférieure à $\varepsilon\Gamma(1-p)$.

Donc, dans le produit $(1-x)^{1-p}F(x)$, la première et la troisième partie s'annulent; il reste

$$\lim_{x=1}[(1-x)^{1-p}F(x)] = K\Gamma(1-p).$$

Question 399.

On mène par le point o des plans parallèles aux faces d'un tétraèdre abcd; ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélépipèdes dont on désigne les volumes par P_a, P_b, P_c, P_d. *On a*

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2+\left(\frac{ob}{P_b}\right)^2+\left(\frac{oc}{P_e}\right)^2=\left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$

(Mannheim.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Prenons le point o pour origine et soient α, β, γ et δ les vecteurs des points a, b, c et d, α, β et γ formant un trièdre trirectangle.

Les arêtes du parallélépipède ayant pour volume P_a sont les parallèles ob_1, oc_1 et od_1 menées par le point o aux droites ab, ac et ad respectivement et limitées aux points b_1, c_1 et d_1, où elles rencontrent les plans acd, abd et abc respectivement.

On a donc

$$ob_1 = K(\alpha-\beta),$$

et nous déterminerons K en exprimant que le point b est dans

le plan *acd*, qui a pour équation

$$S\rho V(\gamma\alpha + \alpha\delta + \delta\gamma) = S\gamma\alpha\delta = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{\overline{ob}}.$$

Remplaçons dans cette équation ρ par l'expression de *ob*, et nous aurons

$$KD = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{\overline{ob}},$$

en désignant par D le sextuple du volume du tétraèdre *abcd*.

On a donc

$$ob_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\beta\delta}{D.\overline{ob}}(\alpha - \beta).$$

On a de même

$$oc_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{oc}.S\gamma\delta}{D.\overline{oc}}(\alpha - \gamma).$$

On a enfin

$$od_1 = K(\alpha - \delta),$$

et le plan *abc* ayant pour équation

$$S\rho V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S\alpha\beta\gamma = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc},$$

on déterminera K par la condition

$$KS(\alpha - \delta)V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}$$

ou

$$KD = \overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}.$$

On a donc

$$od_1 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}}{D}(\alpha - \delta),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} P_\alpha &= S\,ob_1.oc_1.od_1 \\ &= \frac{\overline{oa}^3.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^3} S\beta\delta.S\gamma\delta.S(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta), \end{aligned}$$

ou enfin

$$P_\alpha = \frac{\overline{oa}^3.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^2} S\beta\delta.S\gamma\delta.$$

On aura de même

$$P_b = \frac{\overline{ob}^3.\overline{oc}.\overline{oa}}{D^2}\, S\gamma\delta.S\alpha\delta;$$

$$P_c = \frac{\overline{oc}^3.\overline{oa}.\overline{ob}}{D^2}\, S\alpha\delta.S\beta\delta.$$

On a donc

$$\left(\frac{\overline{oa}}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ob}}{P_b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{oc}}{P_c}\right)^2$$

$$= \frac{D^4}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2}\left(\frac{1}{\overline{oa}^2.S^2\beta\delta.S^2\gamma\delta} + \frac{1}{\overline{ob}^2.S^2\gamma\delta.S^2\alpha\delta} + \frac{1}{\overline{oc}^2.S^2\alpha\delta.S^2\beta\delta}\right)$$

$$= \frac{D^4\,\overline{od}^2}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2.S^2\alpha\delta.S^2\beta\delta.S^2\gamma\delta}.$$

Calculons maintenant P_d.

L'une des arêtes du parallélépipède correspondant est la parallèle à da menée par le point o et limitée au point a_2 où elle perce le plan abc.

On aura donc

$$oa_2 = K(\alpha - \delta),$$

et le plan dbc ayant pour équation

$$S\rho V(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) = S\beta\gamma\delta = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}},$$

on aura

$$KD = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}}$$

et, par suite,

$$oa_2 = \frac{\overline{ob}.\overline{oc}.S\alpha\delta}{\overline{oa}}(\alpha - \delta).$$

On a de même

$$ob_2 = \frac{\overline{oc}.\overline{oa}.S\beta\delta}{\overline{ob}}(\beta - \delta),$$

$$oc_2 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.S\gamma\delta}{\overline{oc}}(\gamma - \delta);$$

d'où

$$P_d = S\,oa_2.ob_2.oc_2 = \frac{\overline{oa}.\overline{ob}.\overline{oc}}{D^2}\, S\alpha\delta.S\beta\delta.S\gamma\delta,$$

et enfin

$$\left(\frac{\overline{od}}{\mathrm{P}_d}\right)^2 = \frac{\mathrm{D}^4\,\overline{od}^2}{\overline{oa}^2.\overline{ob}^2.\overline{oc}^2.\mathrm{S}^2\alpha\delta.\mathrm{S}^2\beta\delta.\mathrm{S}^2\gamma\delta}$$
$$= \left(\frac{\overline{oa}}{\mathrm{P}_a}\right)^2 + \left(\frac{\overline{ob}}{\mathrm{P}_b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{oc}}{\mathrm{P}_c}\right)^2.$$

Question 482.

Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde, passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraètre, sont trois points en ligne droite. (JOACHIMSTHAL.)

SOLUTION

Par M. E. GENTY.

Nous avons montré que si (ν_1, ω_1), (ν_2, ω_2) et (ν_3, ω_3) sont les coordonnées de trois droites, le centre C_h de l'hyperboloïde déterminé par ces trois droites a pour vecteur

$$\gamma_h = \frac{(\mathrm{S}\nu_3\omega_2 - \mathrm{S}\nu_2\omega_3)\nu_1 + (\mathrm{S}\nu_1\omega_3 - \mathrm{S}\nu_3\omega_1)\nu_2 + (\mathrm{S}\nu_2\omega_1 - \mathrm{S}\nu_1\omega_2)\nu_2}{2\,\mathrm{S}\,\nu_1\nu_2\nu_3}.$$

Soit, par exemple, un tétraèdre OABC; O est l'origine; A, B et C ont pour vecteurs α, β et γ respectivement.

Trois des hauteurs auront pour coordonnées

$$\nu_1 = \mathrm{V}\beta\gamma, \qquad \omega_1 = \mathrm{V}\alpha\,\mathrm{V}\beta\gamma;$$
$$\nu_2 = \mathrm{V}\gamma\alpha, \qquad \omega_2 = \mathrm{V}\beta\,\mathrm{V}\gamma\alpha;$$
$$\nu_3 = \mathrm{V}\alpha\beta, \qquad \omega_3 = \mathrm{V}\gamma\,\mathrm{V}\alpha\beta;$$

et l'on trouve immédiatement

$$\gamma_h = \frac{\mathrm{V}\beta\gamma\,\mathrm{S}\alpha(\beta+\gamma) + \mathrm{V}\gamma\alpha\,\mathrm{S}\beta(\gamma+\alpha) + \mathrm{V}\alpha\beta\,\mathrm{S}\gamma(\alpha+\beta)}{2\,\mathrm{S}\alpha\beta\gamma}.$$

Or, si γ_g est le vecteur du centre de gravité C_g de l'hyperboloïde et γ_s le vecteur du centre C_s de la sphère circonscrite, on a

$$\gamma_g = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$$
$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}[\mathrm{T}^2\alpha + \mathrm{S}\alpha(\beta+\gamma)]\,\overrightarrow{\mathrm{V}\beta\gamma} \\ \quad + [\mathrm{T}^2\beta + \mathrm{S}\beta(\gamma+\alpha)]\,\mathrm{V}\gamma\alpha + [\mathrm{T}^2\gamma + \mathrm{S}\gamma(\alpha+\beta)]\,\mathrm{V}\alpha\beta\end{array}\right\}}{4\,\mathrm{S}\alpha\beta\gamma}$$

et

$$\gamma_s = \frac{T^2\alpha V\beta\gamma + T^2\beta V\gamma\alpha + T^2\gamma V\alpha\beta}{2S\alpha\beta\gamma};$$

donc on a

$$\gamma_g = \frac{\gamma_h + \gamma_s}{2},$$

ce qui montre que C_g est le point milieu de la droite $C_h C_s$.

Question 793.

Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_8,\quad a_9,$$
$$b_1,\quad b_2,\quad \ldots,\quad b_8,\quad b_9,$$

jouissant de la propriété qu'étant pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul tel, que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables. (LAGUERRE.)

SOLUTION.

Par M. JUEL.

On rapporte tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_9, b_1, b_2, \ldots, b_9$ à un système cartésien ordinaire, et soient les coordonnées de tous les points

$$(a'_1 a''_1),\quad \ldots,\quad (a'_9 a''_9),\quad (b'_1 b''_1),\quad \ldots,\quad (b'_9 b''_9).$$

Si l'on forme au moyen de ces coordonnées les combinaisons usuelles

$$a'_1 + ia''_1,\quad \ldots,\quad a'_9 + ia''_9,\quad b'_1 + ib''_1,\quad \ldots,\quad b'_9 + ib''_9,$$

si on les représente par les nombres

$$\alpha_1,\quad \ldots,\quad \alpha_9,\quad \ldots,\quad \beta_9,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que les triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables sera

$$(1)\qquad \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\beta_i - \beta_j} = \frac{\alpha_k - \alpha_j}{\beta_k - \beta_j}.$$

Si nous construisons ensuite, dans un nouveau système car-

tésien, les points imaginaires dont les coordonnées sont $(\alpha_1\beta_1)$, ..., $(\alpha_9\beta_9)$, on est conduit, comme conséquence de la relation (1) et de ses analogues, à trouver un groupe de neuf points tels que chaque droite qui contient deux points du groupe en contiendra encore un troisième, et un seul.

Mais, d'après la théorie des courbes du troisième ordre, ce groupe doit nécessairement être celui des neuf points d'inflexion d'une cubique. Donc, etc.

Néanmoins, une solution purement géométrique étant à désirer, bien que difficile, je me permettrai de poser le problème dans le *Tidsskrift,* avec renvoi aux *Nouvelles Annales,* cela va sans dire.

Question 946.

Soient (A) *et* (A′) *deux surfaces dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle* O, *c'est-à-dire telles que les points correspondants se trouvent sur une même droite passant par le point fixe* O. *On demande de démontrer :*

1° *Que dans ce mode de transformation les surfaces liées par la relation*

$$f(r, r') = 0,$$

où f est une fonction quelconque des distances $OM = r$, $OM' = r'$, *jouissent seules de la propriété que leurs normales aux points correspondants se rencontrent en un même point de l'espace : comme une des applications, on peut considérer les surfaces conchoïdes* $r - r' = \pm$ const.;

2° *Que parmi les transformations définies par la relation générale* $f(r, r'') = 0$, *il n'y a que l'homothétie et l'inversion qui jouissent de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure des surfaces transformées.*

(E. Habich.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soient ρ et ρ' les vecteurs de deux points correspondants des surfaces (A) et (A′). On aura

$$\rho' = K\rho.$$

K étant une fonction scalaire de ρ, en sorte qu'on pourra poser

$$dK = S\lambda\, d\rho.$$

Si d'ailleurs ν et ν' sont les orienteurs des normales respectives des deux surfaces, la condition de rencontre de ces deux normales sera

$$(1) \qquad S\rho\nu\nu' = 0.$$

Or on a

$$d\rho' = \rho\, S\lambda\, d\rho + K\, d\rho;$$

d'où, en projetant avec λ,

$$S\lambda\, d\rho' = (S\lambda\rho + K) S\lambda\, d\rho;$$

on a donc

$$(S\lambda\rho + K)\, d\rho' - \rho\, S\lambda\, d\rho' = K(S\lambda\rho + K)\, d\rho.$$

Si nous projetons maintenant avec ν, il vient, en tenant compte de la relation évidente

$$S\nu\, d\rho = 0,$$

$$(S\lambda\rho + K) S\nu\, d\rho' - S\nu\rho\, S\lambda\, d\rho' = 0.$$

On a donc

$$\nu' \parallel (S\lambda\rho + K)\nu - \lambda S\nu\rho,$$

et la condition (1) devient

$$S\rho\lambda\nu = 0.$$

Il en résulte qu'on peut poser

$$\lambda = a\rho + b\nu,$$

d'où

$$dK = S\lambda\, d\rho = a S\rho\, d\rho = a\, d(T^2\rho),$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que $d\rho$ soit le vecteur d'une direction principale de la surface (A).

On aura

$$d\rho = R\, d\nu;$$

d'où

$$d\rho' = R(\rho\, S\lambda\, d\nu + K\, d\nu),$$

et pour que les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, on devra avoir aussi

$$d\rho' \parallel d\nu';$$

d'où

$$(2) \qquad S\rho\, d\nu\, d\nu' = 0.$$

Or on a

$$\nu' = \frac{(S\lambda\rho + K)\nu - \lambda S\nu\rho}{n},$$

n étant le module du vecteur qui figure au numérateur, mais K étant une fonction de $T^2\rho$, on a

$$dK = 2K' S\rho\, d\rho,$$

K' étant la dérivée de K prise par rapport à $T^2\rho$; d'où

$$\lambda = 2K'\rho$$

et, par suite,

$$\nu' = \frac{(2K'T^2\rho + K)\nu - 2K'\rho S\nu\rho}{n} = \frac{A\nu + B\rho}{n};$$

donc

$$d\nu' = \frac{n(dA\nu + A\, d\nu + dB\,\rho + B\, d\rho) - dn(A\nu + B\rho)}{n^2}$$

et la condition (2) devient

$$(n\, dA - A\, dn)\, S\nu\rho\, d\nu = 0,$$

ou

$$n\, dA - A\, dn = 0,$$

ou enfin

$$n = CA = C(2K'T^2\rho + K),$$

C étant une constante, ce qui montre que n doit être une fonction de $T^2\rho$.

Or on a

$$\begin{aligned} n^2 &= 4K'^2T^4\rho + 4KK'T^2\rho + K^2 \\ &\quad + 4K'^2S^2\nu\rho\, T^2\rho - 4K'S^2\nu\rho(2K'T^2\rho + K) \\ &= 4K'(K'T^2\rho + K)(T^2\rho - S^2\nu\rho) + K^2, \end{aligned}$$

et cette expression de n^2 ne peut être une fonction de $T^2\rho$ que si l'on a

$$K' = 0 \qquad \text{ou} \qquad K'T^2\rho + K = 0.$$

La première hypothèse donne l'homothétie et la seconde l'inversion.

On vérifie d'ailleurs très simplement que l'inversion conserve bien les lignes de courbure.

On a, en effet, dans ce cas,

$$K = \frac{1}{T^2\rho}, \qquad K' = -\frac{1}{T^4\rho}, \qquad \lambda = -\frac{2\rho}{T\rho^4};$$

d'où

$$d\rho' = R\,\frac{d\nu\, T^2\rho - 2\rho\, S\rho\, d\nu}{T^4\rho},$$

$$\nu' = \frac{2\rho\, S\nu\rho - \nu T^2\rho}{T^2\rho},$$

$$d\nu = \frac{T^2\rho(2\rho\, S\rho\, d\nu + 2\, d\rho\, S\nu\rho - 2\nu\, S\rho\, d\rho - d\nu\, T^2\rho) - 2\, S\rho\, d\rho(2\rho\, S\nu\rho - \nu\, T^2\rho)}{T^4\rho},$$

ou, en remplaçant $d\rho$ par $R\,d\nu$,

$$d\nu' = \frac{(2RS\nu\rho - T^2\rho)(T^2\rho\, d\nu - 2S\rho\, d\nu\, \rho)}{T^4\rho},$$

ou enfin

$$d\nu' = \frac{2RS\nu\rho - T^2\rho}{R}\, d\rho',$$

ce qui montre bien que les lignes de courbure se correspondent sur les surfaces (A) et (A').

On voit en même temps que, si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface (A), R'_1 et R'_2 ceux de la surface (A'), on a

$$R'_1 = \frac{R_1}{2R_1 S\nu\rho - T^2\rho}, \qquad R'_2 = \frac{R_2}{2R_2 S\nu\rho - T^2\rho};$$

on déduit de là

$$\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} = T^2\rho\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 4\, S\nu\rho,$$

ou, en divisant par $T\rho$,

$$r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + r'\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right) = 4\cos\lambda,$$

r et r' désignant les longueurs $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ respectivement, et λ l'angle du rayon vecteur avec la normale à l'une ou l'autre des surfaces (A) et (A').

Question 1478.

Par un point O *de l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués d'une quadrique et on mène le plan passant par les pieds de ces trois perpendiculaires. Ce plan et les plans analogues obtenus en faisant varier le système des trois plans diamétraux conjugués passent par un même point* M. *Trouver le lieu du point* M *lorsque, le point* O *restant fixe, la quadrique tourne autour d'une droite.* (Pellet.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soient

$$S\rho\varphi\rho = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde ; α, β et γ les vecteurs de trois demi-diamètres conjugués de cette surface et ω le vecteur du point O. Les pieds A_1, B_1 et C_1 des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde auront pour vecteurs

$$\frac{VV\beta\gamma\, V\omega\, V\beta\gamma}{T^2 V\beta\gamma}, \quad \frac{VV\gamma\alpha\, V\omega\, V\gamma\alpha}{T^2 V\gamma\alpha}, \quad \frac{VV\alpha\beta\, V\omega\, V\alpha\beta}{T^2 V\alpha\beta};$$

or, α, β, γ étant trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, on a

$$S\beta\varphi\alpha = 0, \qquad S\gamma\varphi\alpha = 0;$$

d'où

$$V\beta\gamma = K\varphi\alpha,$$

K étant un facteur scalaire; on aura donc pour les vecteurs des points A_1, B_1 et C_1 les nouvelles expressions

$$\frac{V\varphi\alpha\, V\omega\varphi\alpha}{S\alpha\varphi^2\alpha}, \quad \frac{V\varphi\beta\, V\omega\varphi\beta}{S\beta\varphi^2\beta}, \quad \frac{V\varphi\gamma\, V\omega\varphi\gamma}{S\gamma\varphi^2\gamma}.$$

Mais, si l'on pose

$$\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha = \alpha_1, \qquad \varphi^{\frac{1}{2}}\beta = \beta_1, \qquad \varphi^{\frac{1}{2}}\gamma = \gamma_1,$$

α_1, β_1 et γ_1 seront trois orienteurs rectangulaires et les expres-

sions vectorielles ci-dessus prendront la forme

$$\frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\alpha_1\varphi\alpha_1}, \quad \frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\beta_1\varphi\beta_1}, \quad \frac{V\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1 V\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\gamma_1\varphi\gamma_1},$$

ou

$$\omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\alpha_1\varphi\alpha_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1, \quad \omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\beta_1\varphi\beta_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1, \quad \omega - \frac{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\gamma_1\varphi\gamma_1}\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1,$$

et, si l'on porte l'origine au point O, l'équation du plan $A_1 B_1 C_1$ sera

$$S\rho\left(\frac{S\alpha_1\varphi\alpha_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1} + \frac{S\beta_1\varphi\beta_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1} + \frac{S\gamma_1\varphi\gamma_1 V\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}\right) + S\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1 = 0,$$

ou encore

$$(1)\quad S\rho\left(\frac{S\alpha_1\varphi\alpha_1\,\varphi^{-\frac{1}{2}}\alpha_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\alpha_1} + \frac{S\beta_1\varphi\beta_1\,\varphi^{-\frac{1}{2}}\beta_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\beta_1} + \frac{S\gamma_1\varphi\gamma_1}{S\omega\varphi^{\frac{1}{2}}\gamma_1}\varphi^{-\frac{1}{2}}\gamma_1\right) + 1 = 0.$$

Or on a

$$S\alpha_1\varphi\alpha_1 + S\beta_1\varphi\beta_1 + S\gamma_1\varphi\gamma_1 = m_2,$$

m_2 étant un invariant de la fonction φ.

Donc le plan (1) passe par le point fixe P ayant pour vecteur

$$-\varphi\frac{\omega}{m_2}.$$

Si l'on revient à l'origine primitive, le vecteur de ce point sera

$$\frac{(m_2 - \varphi)\omega}{m_2}.$$

Au lieu de supposer que l'ellipsoïde tourne autour d'une droite, nous pouvons supposer que la quadrique est fixe et que le point O tourne autour de la droite.

On peut alors poser

$$\omega = \lambda + R(\mu\cos\theta + \nu\sin\theta),$$

λ étant le vecteur du centre M du cercle décrit par le

point O, R le rayon de ce cercle, λ et μ deux orienteurs rectangulaires situés dans son plan.

On a alors, en appelant ρ le vecteur du point P,

$$\rho - \frac{(m_2 - \varphi)\lambda}{m_2} = \frac{R}{m_2}[(m_2 - \varphi)\,\mu\cos\theta + (m_2 - \varphi)\,\nu\sin\theta],$$

équation vectorielle d'une ellipse ayant pour centre le point correspondant du point M; on voit d'ailleurs que les points correspondants aux extrémités de deux rayons rectangulaires quelconques du cercle décrit par le point O sont les extrémités de deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Question 1484.

On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' *et* b, b', b'' *qui font partie de deux divisions homographiques. Sur* ab *comme diamètre on décrit un cycle* C *dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de* a *en* b; *les segments* $a'b'$ *et* $a''b''$ *déterminent de même deux autres cycles* C' *et* C''. *Si l'on trace un cycle tangent à* C, C' *et* C'', *démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles des deux divisions homographiques.*

(LAGUERRE.)

SOLUTION

Par M. JUEL.

On peut énoncer plus brièvement la question comme il suit. Soient $(a, b, c, \ldots)$, $(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ deux groupes de points faisant partie de deux divisions homographiques. Les cycles *de même sens* construits sur aa_1, bb_1, cc_1 comme diamètres seront tous touchés par un même cycle.

Soit e un point double des deux divisions homographiques et appliquons une transformation par inversion, avec e pour pôle. L'autre point double f se transformera en f', $a_1 b$ en $a'_1 b'_1 \ldots$

On aura donc

$$f'a' : f'a'_1 = f'b' : f'b'_1 = \ldots = \text{const.}$$

et tous les cycles décrits sur $a'a'_1$, $b'b'_1$, ... comme diamètres seront touchés par deux droites passant par f'. Le théorème

est donc démontré; car, dans la transformation par inversion, les cycles se transforment en cycles.

Question 1534.

Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles donnés se compose de cinq cercles.

(ENTRETIN.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Pour bien analyser cette question, il est nécessaire de la diviser en deux cas généraux.

I. *Cas des cercles extérieurs l'un à l'autre ou se rencontrant en des points réels.*

II. *Cas des cercles dont l'un est intérieur à l'autre.*

I. Dans ce premier cas, l'un des axes de la conique coïncide avec la ligne des centres, l'autre axe est perpendiculaire à la ligne des centres.

Il peut donc se présenter deux cas :

1° Les foyers sont sur la ligne des centres.

La ligne des centres fait donc partie du lieu des foyers.

Fig. 1.

2° L'axe focal est perpendiculaire à la ligne des centres.

Prenons des axes rectangulaires, l'origine étant au centre de l'un des cercles et l'axe des x étant la ligne des centres.

Soient R le rayon du cercle ayant son centre à l'origine, r le rayon de l'autre cercle et a la distance des centres.

L'équation d'une conique bitangente au cercle (R), et ayant pour un de ses axes l'axe des x, est

$$(1)\qquad \lambda(x^2+y^2-R^2)+(x-p)^2=0.$$

De même, l'équation d'une conique bitangente au cercle (r), et ayant pour un de ses axes l'axe des x, est

$$(2)\qquad \mu[(x-a)^2+y^2-r^2]+(x-q)^2=0.$$

Ces deux équations doivent être identiques, ce qui conduit aux relations

$$\lambda=\mu,$$
$$p-q=a\lambda,$$
$$p^2-q^2=\lambda(R^2+a^2-r^2).$$

En divisant membre à membre les deux dernières relations, on obtient

$$p+q=\frac{R^2+a^2-r^2}{a}.$$

Par conséquent

$$(3)\qquad p=\frac{a\lambda}{2}+\frac{R^2+a^2-r^2}{2a}.$$

L'équation générale des coniques (1) ne contient plus que le paramètre λ, puisque (3) donne p en fonction de λ.

L'abscisse du centre a pour expression $\frac{p}{1+\lambda}$. Si donc on change dans (1) x en $x+\frac{p}{1+\lambda}$, on arrive à l'équation

$$x^2(1+\lambda)+\lambda y^2=\lambda\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right).$$

Si A et B désignent les demi-axes de la conique, on a donc

$$A^2=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right),$$
$$B^2=R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}.$$

Par suite,

$$C^2=B^2-A^2=\frac{1}{1+\lambda}\left(R^2-\frac{p^2}{1+\lambda}\right).$$

Si donc X et Y sont les coordonnées d'un foyer, on a

$$(4) \qquad X = \frac{p}{1+\lambda},$$

$$(5) \qquad Y^2 = \frac{R^2}{1+\lambda} - \frac{p^2}{(1+\lambda)^2}.$$

On aura le lieu des foyers en éliminant p et λ entre (3), (4) et (5).

On en déduit

$$X^2 + Y^2 = \frac{R^2}{1+\lambda},$$

$$X - \frac{a}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2a(1+\lambda)}.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on trouve l'équation d'un cercle

$$X^2 + Y^2 - \left(X - \frac{a}{2}\right)\frac{2aR^2}{R^2 - r^2} = 0,$$

dont le rayon est $\frac{aRr}{R^2 - r^2}$.

II. *Cas où l'un des cercles est intérieur à l'autre.* — Prenons des axes rectangulaires, au centre O du plus petit cercle, de rayon r, l'axe des x étant dirigé vers le centre C de l'autre cercle de rayon R. Soit $OC = a$.

Considérons une conique bitangente à chacun des deux cercles et dont l'un des axes soit incliné de l'angle α sur l'axe des x. Les cordes de contact dans chacun des cercles sont parallèles à chacun des axes de la conique. De sorte que cette conique a indifféremment l'une des équations

$$\lambda(x^2 + y^2 - r^2) + (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0,$$

$$\mu[(x-a)^2 + y^2 - R^2] + (x\sin\alpha - y\cos\alpha - q)^2 = 0.$$

L'identification de ces deux équations conduit aux relations

$$(1) \qquad \lambda + \mu + 1 = 0,$$

$$(2) \qquad p\cos\alpha + q\sin\alpha + a\mu = 0,$$

$$(3) \qquad p\sin\alpha = q\cos\alpha,$$

$$(4) \qquad p^2 + q^2 - \lambda r^2 + \mu(a^2 - R^2) = 0.$$

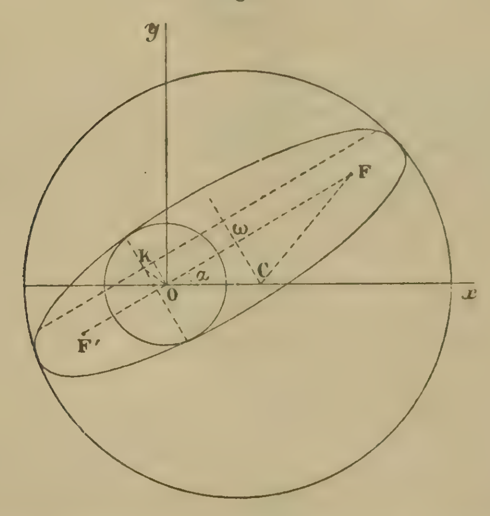
De (2) et (3), on tire

$$p^2 + q^2 = a^2\mu^2,$$
$$p = -a\mu\cos\alpha,$$
$$q = -a\mu\sin\alpha;$$

(4) devient donc

(5) $$a^2\mu^2 - \lambda r^2 + \mu(a^2 - R^2) = 0.$$

Fig. 2.



En résolvant (1) et (5), on trouve une équation du second degré en λ,

$$a^2(\lambda + 1)^2 - (\lambda + 1)(a^2 + r^2 - R^2) + r^2 = 0;$$

d'où

(6) $$\lambda + 1 = \frac{a^2 + r^2 - R^2 \pm \sqrt{(a^2 + r^2 - R^2)^2 - 4a^2r^2}}{2a^2}.$$

On a ainsi deux valeurs de λ, λ' et λ''.

Par conséquent, la première équation dans laquelle λ est la constante (6) et où

(7) $$p = a(\lambda + 1)\cos a$$

est l'équation générale des coniques bitangentes aux deux cercles.

On peut remarquer incidemment que

$$p^2 + q^2 = a^2(\lambda + 1)^2.$$

Donc, si K est le point de rencontre des deux cordes communes, on a

$$OK = (\lambda + 1)a,$$

ce qui montre que le *lieu du point de rencontre des deux cordes communes se compose de deux cercles de centre* O *et de rayons* $a(\lambda' + 1)$ *et* $a(\lambda'' + 1)$.

Les coordonnées du centre ω de la conique sont

$$x = a\cos^2\alpha,$$
$$y = a\sin\alpha\cos\alpha,$$

de sorte que *le lieu des centres des coniques est le cercle décrit sur* OC *comme diamètre.*

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en ω. Il faut changer

$$x \quad \text{en} \quad x + a\cos^2\alpha,$$
$$y \quad \text{en} \quad y + a\sin\alpha\cos\alpha.$$

L'équation de la conique devient alors

$$\lambda(x^2+y^2) + (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2$$
$$+ \lambda(a^2\cos^2\alpha - r^2) + (a\cos\alpha - p)^2 = 0.$$

Prenons encore pour nouveaux axes de coordonnées les axes de la conique : il faut changer

$$x \quad \text{en} \quad x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y \quad \text{en} \quad x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

On arrive alors à l'équation

$$(\lambda + 1)x^2 + \lambda y^2 = \lambda[r^2(\lambda + 1)a^2\cos^2\alpha].$$

Donc, si A et B sont les demi-axes de la conique

$$A^2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}[r^2 - (\lambda + 1)a^2\cos^2\alpha],$$
$$B^2 = r^2 - (\lambda + 1)a^2\cos^2\alpha.$$

1° *Si l'axe focal passe par* O,

$$C^2 = A^2 - B^2 = a^2\cos^2\alpha - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Soit F l'un des foyers, alors

$$\overline{CF}^2 = \overline{\omega C}^2 + \overline{\omega F}^2.$$

Mais

$$\omega C = a \sin \alpha,$$

$$\overline{\omega F}^2 = a^2 \cos^2 \alpha - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Donc

$$\overline{CF}^2 = a^2 - \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

La longueur CF est donc constante. Le lieu des foyers de l'axe passant par O se compose donc de deux cercles de centre C et de rayons $\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda' + 1}}$ et $\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'' + 1}}$.

2° *Si l'axe focal passe par* C, *on a*

$$C^2 = B^2 - A^2 = \frac{r^2}{\lambda + 1} - a^2 \cos^2 \alpha.$$

Dans ce cas,

$$\overline{OF}^2 = \overline{O\omega}^2 + \overline{\omega F}^2 = a^2 \cos^2 \alpha + C^2 = \frac{r^2}{\lambda + 1}.$$

Le lieu des foyers de l'axe passant par C comprend donc deux cercles de centre O et de rayons $\frac{r}{\sqrt{\lambda' + 1}}$ et $\frac{r}{\sqrt{\lambda'' + 1}}$.

En résumé, le lieu total se compose donc :

1° De la ligne des centres;

2° Du cercle (C_1) dont le centre est situé sur la ligne des centres des deux cercles donnés à la distance du centre du cercle (R) égale à $\frac{aR^2}{R^2 - r^2}$, et dont le rayon a pour expression $\frac{aRr}{R^2 - r^2}$;

3° De deux cercles (C_2) et (C_3) ayant leur centre commun au centre du cercle (R) et dont les rayons sont respectivement

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda' + 1}}, \quad \sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'' + 1}};$$

4° De deux cercles (C_4) et (C_5) ayant leur centre commun au centre du cercle (r) et dont les rayons sont respectivement

$$\frac{r}{\sqrt{\lambda'+1}}, \quad \frac{r}{\sqrt{\lambda''+1}}.$$

Mais il convient de remarquer que ces cercles ne sont pas toujours réels.

Ces cercles peuvent être imaginaires, soit comme lieu des foyers de coniques imaginaires, soit comme lieu des foyers imaginaires de coniques réelles.

Sans entrer dans une discusssion algébrique qui serait assez longue, il est facile de se rendre compte géométriquement que, quelle que soit la situation des cercles donnés, le cercle (C_1) est toujours réel.

On peut encore remarquer que *l'excentricité de toutes les coniques est constante*.

En effet, si E désigne l'excentricité, nous avons

$$E^2 = \frac{C^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Cas particulier où $r = 0$. — Le cercle (C_1) se réduit alors à

$$(X - a)^2 + Y^2 = 0.$$

En effet, le centre du cercle (R) est alors l'un des foyers de toutes les coniques ayant ce centre pour autre foyer et bitangentes au cercle (r).

On a alors

$$\lambda' + 1 = \frac{a^2 - R^2}{a^2}, \qquad \lambda'' + 1 = 0.$$

Le cercle (C_2) a pour rayon

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda' + 1}} = a.$$

Le rayon de (C_3) est

$$\sqrt{a^2 - \frac{r^2}{\lambda'' + 1}} = \frac{0}{0}.$$

On peut lever l'indétermination en écrivant

$$\frac{r^2}{\lambda''+1} = \frac{2a^2r^2}{(a^2+r^2-R^2)-\sqrt{(a^2+r^2-R^2)^2-4a^2r^2}}$$
$$= \frac{(a^2+r^2-R^2)+\sqrt{(a^2+r^2-R^2)^2-4a^2r^2}}{2};$$

par suite

$$\lim\left(\frac{r^2}{\lambda''+1}\right) = (a^2-R^2).$$

Le rayon de (C_3) est donc R.

Le rayon de (C_4) est nul.

Le rayon de (C_5) a pour valeur $\sqrt{a^2-R^2}$.

Ce dernier cercle n'est réel que si $a > R$.

Il en résulte que le lieu du second foyer d'une conique ayant un foyer donné et bitangente à un cercle donné est un cercle, ce qui est évident géométriquement.

Le seul cercle correspondant à des coniques réelles est, dans tous les cas, le cercle (C_2).

Question 1541.

Trouver le lieu des points tels que les quatre normales menées de ces points à une ellipse donnée forment un faisceau harmonique. (L. Mirman.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

On sait que l'équation aux coefficients angulaires des quatre normales à l'ellipse issues d'un point (α, β) est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & b^2\alpha^2m^4 - 2b^2\alpha\beta m^3 \\ & \quad + (a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)m^2 - 2a^2\alpha\beta m + a^2\beta^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut écrire cette équation

$$m^4 - Am^3 + Bm^2 - Cm + D = 0,$$

en posant

$$A = \frac{2\beta}{\alpha},$$

$$B = \frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4}{b^2\alpha^2},$$

et

$$C = \frac{2\beta a^2}{b^2 \alpha},$$

$$D = \frac{a^2 \beta^2}{b^2 \alpha^2}.$$

On a donc, m_1, m_2, m_3 et m_4 étant les quatre racines de (1),

$$(m_1 + m_2) + (m_3 + m_4) = A,$$
$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + m_1 m_2 + m_3 m_4 = B,$$
$$m_1 m_2 (m_3 + m_4) + m_3 m_4 + (m_1 + m_2) = C,$$
$$(m_1 m_2)(m_3 m_4) = D.$$

Pour que les quatre normales m_1, m_2, m_3, m_4 forment un faisceau harmonique, il faut que

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2 m_1 m_2 + 2 m_3 m_4.$$

Il faut éliminer m_1, m_2, m_3 et m_4 entre ces cinq relations pour avoir la relation qui lie entre eux les coefficients A, B, C et D.

Posons, pour abréger,

$$m_1 + m_2 = P, \qquad m_1 m_2 = R,$$
$$m_3 + m_4 = Q, \qquad m_3 m_4 = S.$$

Alors les cinq relations deviennent

$$(2) \qquad P + Q = A,$$
$$(3) \qquad PQ + S + R = B,$$
$$(4) \qquad RQ + PS = C,$$
$$(5) \qquad RS = D,$$
$$(6) \qquad PQ = 2(R + S).$$

De (3) et (6) on déduit

$$(7) \qquad PQ = \frac{2B}{3},$$

$$(8) \qquad R + S = \frac{B}{3}.$$

On a aussi

$$(P + Q)(R + S) = \frac{AB}{3} = (RQ + PS) + (PR + QS).$$

Par conséquent

$$(9) \qquad PR + QS = \frac{AB}{3} - C.$$

Multiplions membre à membre (4) et (9), il vient

$$PQ(R^2 + S^2) + RS(P^2 + Q^2) = C\left(\frac{AB}{3} - C\right),$$

et, par conséquent, en y remplaçant PQ, RS, (P + Q), (R + S) par leurs valeurs en fonction de A, B, C, D et réduisant, il vient

$$(10) \qquad \frac{2B^3}{27} = \frac{8BD}{3} + \frac{ABC}{3} - A^2D - C^2.$$

En portant dans cette relation les valeurs de A, B, C, D en fonction de α et β, on arrive à l'équation

$$(11) \qquad (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 54c^4a^2b^2\alpha^2\beta^2 = 0.$$

C'est une courbe ayant même point de rebroussement que la développée de l'ellipse et située à l'intérieur de cette développée dont l'équation est

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27c^4a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

Dans le cas de la parabole, on aurait trouvé que le lieu a pour équation

$$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}$$

alors que la développée a pour équation

$$y^2 = \frac{8(x-p)^3}{27p}.$$

Question 1547.

Soient AA', BB' *deux diamètres conjugués d'une ellipse ;* MM' *un diamètre quelconque : les pôles des quatre droites* MA, MA', M'B, M'B' *sont situés sur une hyperbole qui passe par le centre de l'ellipse, et est tangente, en ce point, au diamètre* MM' ; *le centre de cette courbe est situé sur l'ellipse, et ses asymptotes sont parallèles aux droites* AA', BB', *respectivement.* (Genty.)

SOLUTION.

Par M. X***.

Soient a et b les demi-longueurs des deux diamètres conjugués, pris pour axes de coordonnées; l'équation de l'ellipse sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient d'autre part $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. On trouve très facilement pour les coordonnées des pôles des quatre droites :

Pour le pôle MA :

$$x = a, \qquad y = \frac{b(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Pour le pôle MA′ :

$$x = -a, \qquad y = \frac{b(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Pour le pôle de M′B :

$$x = -\frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad y = b.$$

Pour le pôle de M′B′ :

$$x = -\frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad y = -b.$$

Formons maintenant l'équation d'une hyperbole satisfaisant aux conditions spécifiées dans l'énoncé. Rapportée à ses asymptotes, pour axes des x' et des y', son équation sera de la forme

$$x'y' - m^2 = 0;$$

donc, comme les nouveaux axes sont parallèles aux premiers, et que l'hyperbole doit passer par le centre de l'ellipse, si $x = a\cos\theta$ et $y = b\sin\theta$ sont les coordonnées du point de l'ellipse qui est le centre de l'hyperbole, cette dernière, par rapport aux axes primitifs, aura pour équation

$$xy - bx\sin\theta - ay\cos\theta = 0;$$

et il ne reste plus qu'à exprimer que la tangente à l'origine, qui est

$$bx\sin\theta + ay\cos\theta = 0,$$

se confond avec le diamètre MM′, ce qui donne

$$\tan g\,\theta = -\tan g\,\varphi.$$

Or, si nous prenons $\theta = \pi - \varphi$, l'équation de l'hyperbole devient

$$xy - bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0,$$

et l'on vérifie aisément que les pôles des quatre droites MA, MA′, M′B, M′B′ se trouvent sur cette courbe. C. Q. F. D.

Question 1586.

Démontrer que les droites joignant le sommet d'un cône aux centres des sphères osculatrices d'une trajectoire oblique des génératrices sont rencontrées et partagées dans un rapport constant par les rectifiantes de la trajectoire. (Cesaro.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soit ρ le vecteur d'un point de la courbe exprimé en fonction de l'arc, le sommet du cône étant pris pour origine.

On aura les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} S^2\rho\rho' = \cos^2\theta\, T^2\rho, \\ T^2\rho' = 1, \qquad S\rho'\rho'' = 0, \end{cases}$$

θ étant un angle constant.

En prenant la dérivée de l'équation (1), il vient

$$S\rho\rho'(1 + S\rho\rho'') = S\rho\rho'\cos^2\theta;$$

d'où

$$S\rho\rho'' = -\sin^2\theta$$

et

$$(2)\qquad S\rho\rho''' = 0.$$

Ceci posé, la droite rectifiante est l'intersection du plan

$$(3)\qquad S(\varpi - \rho)\rho'' = 0,$$

avec sa position infiniment voisine. Or, si l'on prend la dérivée de l'équation (3), il vient

$$S(\varpi - \rho)\rho''' = 0.$$

La rectifiante a donc pour équation

$$\varpi = \rho + \mathrm{K}\,\mathrm{V}\,\rho''\rho'''.$$

Le centre de la sphère osculatrice a lui-même pour vecteur

$$\gamma = \rho + \frac{\mathrm{V}\,\rho'''\rho'}{\mathrm{S}\,\rho'\rho''\rho'''}.$$

Pour que ce vecteur rencontre la rectifiante, il faut qu'on puisse déterminer pour K et l des valeurs telles qu'on ait

$$l\left(\rho + \frac{\mathrm{V}\,\rho'''\rho'}{\mathrm{S}\,\rho'\rho''\rho'''}\right) = \rho + \mathrm{K}\,\mathrm{V}\,\rho''\rho'''.$$

En projetant avec ρ''', on retrouve la relation (2), ce qui montre que la rencontre a lieu.

Si l'on projette avec ρ'', il vient

$$l(1 + \mathrm{S}\,\rho\rho'') = \mathrm{S}\,\rho\rho'';$$

d'où

$$l = -\tan^2\theta.$$

Donc le point de rencontre a pour vecteur

$$\rho = -\gamma \tan^2\theta,$$

et la proposition est démontrée.

Question 1626.

Soit une série

$$\mathrm{F}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dans laquelle les coefficients a sont positifs. On suppose qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} a_n n^p = \mathrm{K},$$

K *étant une constante différente de zéro et p un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque x tend vers* 1, *le produit*

$$(1 - x)^{1-p} f(x)$$

a pour limite

$$\mathrm{K}\,\Gamma(1 - p). \qquad \text{(Appell.)}$$

SOLUTION

Par M. E. Cesaro.

Considérons deux séries divergentes, à termes positifs,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

et supposons que les séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

soient convergentes pour $|x| < 1$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ leurs sommes. Si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

on peut, après avoir fixé le nombre positif ε, arbitrairement petit, trouver un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} - k \right| < \varepsilon,$$

quel que soit x. Il en résulte que, pour n infini, le rapport de $f^{(n)}(x)$ à $g^{(n)}(x)$ tend à devenir constant. Ce rapport tend donc aussi vers une limite, lorsque, n croissant à l'infini, x tend vers l'unité. Or, $f(x)$ et $g(x)$ devenant infinies pour $x = 1$, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres, on a, en appliquant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=1} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = k.$$

De cette proposition connue on déduit aisément le théorème énoncé par M. Appell. Supposons que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

A cause de la divergence de la série dont le terme général est a_n, cela ne peut arriver que pour $p \leq 1$.

Si l'on pose

$$g(x) = \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \ldots,$$

on a

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} n^p a_n = k.$$

Soit, pour un instant, $f(x) = (1-x)^{p-1}$, de sorte que

$$a_n = \frac{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots n}.$$

On obtient

$$\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = \lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{(1-p)(2-p)\ldots(n-p)} = \Gamma(1-p).$$

Donc

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = \lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x=1}\frac{g(x)}{(1-x)^{p-1}} = k\Gamma(1-p).$$

A ce dernier résultat on parvient aussi, d'une manière directe, en considérant la fonction

$$(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots.$$

D'après les propriétés des coefficients binômiaux, la somme des $n+1$ premiers coefficients, dans le développement de $(1-x)^{1-p}$, est

$$\alpha_n = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

et l'on a

$$\lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = \lim_{n=8}\frac{p(1+p)(2+p)\ldots(n-1+p)}{n!\,n^{p-1}} = \frac{1}{\Gamma(p)};$$

puis, en vertu d'un théorème connu (¹),

$$\lim_{n=\infty}(a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \ldots + a_n\alpha_0)$$
$$= \Gamma(p)\Gamma(1-p)\lim_{n=\infty} n^p a_n \lim_{n=\infty} n^{1-p}\alpha_n = k\,\Gamma(1-p).$$

Donc, si l'on observe que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a_0\alpha_n = a_0\alpha_n + a_1\alpha_{n-1} + \ldots + a_n\alpha_0,$$

on peut écrire

$$\lim_{x=1}(1-x)^{1-p}f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = k\,\Gamma(1-p).$$

(¹) *Bulletin de Darboux*, 1890, p. 117.

Question 1637.

Une droite quelconque rencontre un limaçon de Pascal, dont le point de rebroussement est O, *en quatre points* A, B, C, D.

1° *Quelle que soit la droite, on a la relation*

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OC} + \mathrm{OD} = \text{const.}$$

2° *Si cette droite est de plus tangente à un cercle fixe* C *ayant son centre en* O, *on a aussi*

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = \text{const.}$$

3° *Cette tangente au cercle* C *rencontre le cercle base de la conchoïde-limaçon en deux points* P *et* Q.

On a la relation

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\mathrm{OC}.\mathrm{OD} = \overline{\mathrm{OP}}^2.\overline{\mathrm{OQ}}^2.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Prenons pour origine le point double du limaçon et pour axe polaire son axe de symétrie, et soient

$$\rho = a + b\cos\omega$$

l'équation du limaçon, et

$$\text{(D)} \qquad \rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)}$$

celle d'une droite quelconque.

De ces équations on tire

$$\cos\omega = \frac{\rho - a}{b},$$

$$\sin\omega = \frac{-\rho^2\cos\alpha + a\rho\cos\alpha + bp}{b\rho\sin\alpha}.$$

Écrivant que la somme des carrés de ces expressions égale 1,

nous avons, après calculs,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho^4 - 2a\rho^3 + (a^2 - 2bp\cos\alpha - b^2\sin^2\alpha)\rho^2 \\ &\qquad + 2abp\cos\alpha\,\rho + b^2p^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

si ρ', ρ'', ρ''', ρ^{iv} sont les racines de cette équation, nous avons

$$\rho' + \rho'' + \rho''' + \rho^{\text{iv}} = 2a = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De plus

$$\rho'\rho''\rho'''\rho^{\text{iv}} = b^2p^2,$$

si la droite (D) est tangente à un cercle fixe de centre O, p est constant; d'où la seconde partie du théorème.

Le cercle base de la conchoïde-limaçon étant

$$\rho = b\cos\omega,$$

nous aurons l'équation aux rayons vecteurs des points communs à ce cercle et à la droite D en faisant $a = 0$ dans (1); on a ainsi

$$\rho^4 - b(2p\cos\alpha + b\sin^2\alpha)\rho^2 + b^2p^2 = 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}}^2.\overline{\text{OQ}}^2 &= b^2p^2 \\ &= \text{OA}.\text{OB}.\text{OC}.\text{OD}. \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Remarque. — On sait qu'un limaçon de Pascal est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique ayant son axe pour axe focal et son point double pour foyer; on aurait pu déduire facilement les propriétés du limaçon que nous venons d'établir des propriétés des coniques.

Question 1638.

On considère un cercle fixe C *et un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement* O. *La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point* O *au point d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Prenons pour origine le point de rebroussement, et pour axe polaire l'axe de symétrie, communs aux cardioïdes du faisceau; soit

$$\rho = a(1 + \cos\omega)$$

l'équation de l'une de ces courbes. Soit

$$\rho^2 - (m\cos\omega + n\sin\omega)\rho + p = 0$$

l'équation du cercle C. Éliminant ω entre ces équations, nous obtenons

$$\begin{aligned}[(a-m)^2 + n^2]\rho^4 + 2[(a-m)am - an^2]\rho^3 \\ + [a^2m^2 + 2pa(a-m)]\rho^2 + 2a^2mp\rho + p^2a^2 = 0.\end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont les rayons vecteurs des points communs à la cardioïde et au cercle situés à distance finie (les autres points communs sont les points cycliques du plan, points doubles de la cardioïde).

La somme des inverses des racines de l'équation (1) est

$$-\frac{2a^2mp}{p^2a^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{2m}{p}.$$

Elle est indépendante de a, d'où le théorème.

Remarque. — Une cardioïde étant la transformée par inversion d'une parabole dont le foyer est le point de rebroussement de la cardioïde, la proposition ci-dessus peut se déduire de la suivante, dont la démonstration directe n'offre d'ailleurs pas de difficulté.

Soient un cercle fixe et un faisceau de paraboles ayant même foyer et même axe; si A, B, C, D sont les points communs à ces courbes, et F le foyer de la parabole, on a, quelle que soit la parabole,

$$FA + FB + FC + FD = \text{const.}$$

Question 1639.

On considère une cardioïde et un point fixe P *dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en* P *ren-*

contre la cardioïde en huit points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces huit points au point de rebroussement de la cardioïde est constante.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

La cardioïde admet les points cycliques du plan pour points doubles; elle a avec un cercle quelconque deux points communs en chacun de ces points. La somme des distances de ces quatre points à l'origine est nulle, à cause de la définition des points cycliques.

Les rayons vecteurs des quatre points communs, situés à distance finie, sont les racines de l'équation (1) (*voir* solution de la question 1638). Leur somme est

$$-\frac{2[(a-m)am-an^2]}{(a-m)^2+n^2},$$

expression indépendante de p.

Si le rayon du cercle varie, son centre restant fixe, m et n conservent une valeur constante. Il en est par suite de même de l'expression ci-dessus; d'où le théorème.

Remarque. — De cette propriété, on déduit la suivante :

Si un cercle passant par deux points fixes, et de rayon variable, rencontre en A, B, C, D une parabole de foyer F, on a, quel que soit le rayon,

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}+\frac{1}{FC}+\frac{1}{FD}=\text{const.}$$

Question 1640.

Lieu géométrique des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes chacune en un point fixe.

Cas particuliers. — 1° *Les deux points de contact sont à égale distance du point d'intersection des deux droites données.*

2° *Les deux droites données sont parallèles.* (Jamet.)

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

Soient

Ox, Oy les deux droites fixes;
A le point fixe donné sur Ox;
B le point fixe donné sur Oy.

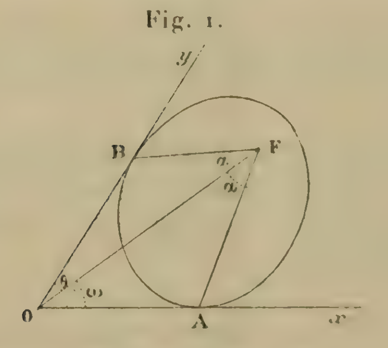
Soit F un foyer d'une conique tangente en A à Ox, en B à Oy :

On sait que FO est bissectrice de $\widehat{BFA}$ ou de son supplément; cette propriété permet de trouver facilement l'équation du lieu demandé en coordonnées polaires, OA étant l'axe, O l'origine.

Supposons que FO soit bissectrice de $\widehat{AFB}$, et désignons OA par a, OB par b, $\widehat{yOx}$ par θ, et les angles $\widehat{AFO}$ et $\widehat{BFO}$ par α; nous avons (*fig.* 1)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin(\omega+\alpha)},$$
$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin(\alpha+\theta-\omega)}.$$

Fig. 1.



Ces relations sont vraies dans tous les cas de figure; elles s'écrivent

$$(\rho - a\cos\omega)\sin\alpha = a\sin\omega\cos\alpha,$$
$$[\rho - b\cos(\theta-\omega)]\sin\alpha = b\sin(\theta-\omega)\cos\alpha;$$

d'où, en éliminant α,

$$(\rho - a\cos\omega)\, b\sin(\theta-\omega) = [\rho - b\cos(\theta-\omega)]\, a\sin\omega.$$

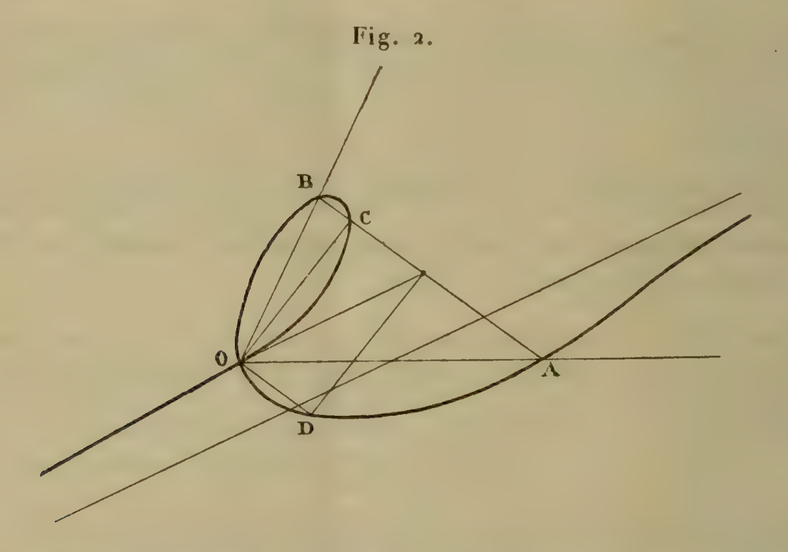
et, par suite,

$$\rho = \frac{ab \sin(\theta - 2\omega)}{b \sin(\theta - \omega) - a \sin\omega}:$$

telle est l'équation du lieu.

Ce lieu est une cubique circulaire facile à construire : elle admet O pour point double, et ses tangentes en ce point sont les bissectrices de $\widehat{yOx}$ et de son supplément; elle passe également par A et B, par la projection C de O sur AB, et sur la perpendiculaire à AB en son milieu (*fig.* 2).

Fig. 2.



Son asymptote est parallèle à la médiane du triangle OAB issue de O.

Cette courbe se présente dans plusieurs questions : elle est en particulier le lieu des points de contact des tangentes, et des pieds des normales issues de O aux côniques ayant pour foyers les points A et B.

Cas où OA = OB. — L'équation de la courbe prend alors la forme

$$\rho = \frac{a \sin(\theta - 2\omega)}{\sin(\theta - \omega) - \sin\omega}$$

ou

$$\rho = \frac{a \cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\cos\frac{\theta}{2}} \, \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}.$$

Le lieu se décompose en une droite

$$\sin\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right) = 0,$$

bissectrice de $\widehat{yOx}$, et en un cercle

$$\rho = \frac{a\cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

qui est le cercle circonscrit au triangle OAB.

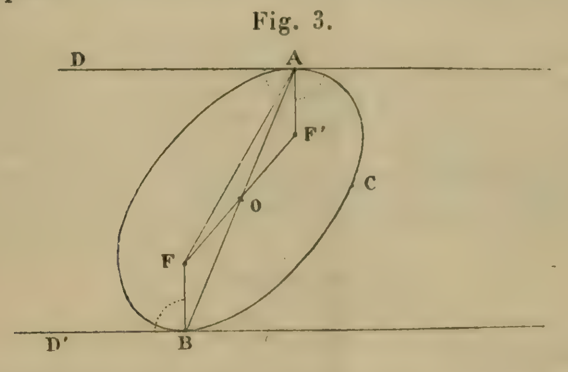
Ce résultat pouvait se prévoir : dans le cas en effet où OA = OB, il est clair que la bissectrice de $\widehat{AOB}$ fait partie du lieu, qui se décompose par suite en une droite et une conique : cette conique est un cercle, puisque la cubique passe par les points cycliques ; ce cercle doit d'ailleurs passer par O, A et B.

Cas où les droites sont parallèles. — Soit C une conique tangente à D en A, à D′ en B, D′ et D étant deux droites parallèles, F et F′ les foyers (*fig.* 3). On a

$$\widehat{FAD} = \widehat{FBD'},$$

AF et BF sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques.

Fig. 3.



Le lieu des foyers est dans ce cas une conique passant par A et B. Elle a évidemment pour centre le milieu O de AB.

Les directions pour lesquelles deux rayons homologues sont parallèles sont la direction des droites D et D′ et la direction

perpendiculaire. Par conséquent le lieu est une hyperbole équilatère de centre O, passant par A et B, et ayant pour asymptotes la droite équidistante de D et D′ et la perpendiculaire à cette droite menée par O.

Question 1642. ✓

Soit une conique inscrite à un triangle ABC *en* A′, B′, C′; *a*, *b*, *c* *les milieux de* BC, CA, AB; α, β, γ *les polaires de* *a*, *b*, *c* *par rapport à la conique. Démontrer que les trois points* (α, B′C′), (β, C′A′), (γ, A′B′) *sont en ligne droite. Généralisation.* (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. R. SONDAT.

Appelons I, H, K les points (α, B′C′), (β, C′A′), (γ, A′B′). Comme *a* et A ont pour polaires α et B′C′, I est le pôle de A*a*. De même H et K sont les pôles de B*b* et C*c*.

Pour que les points I, H, K soient en ligne droite il suffit que les droites polaires A*a*, B*b*, C*c* soient concourantes, contion qui est ici remplie.

Question 1646. ✓

Étant donnés trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *homologiques par rapport à un axe, si l'on joint chacun des points du tableau*

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

à son associé mineur, on aura neuf droites concourantes [*l'associé de* A *est le point* (B_1C_2, B_2C_1), (P. SONDAT.)

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Représentons par

$$(1)\qquad \begin{matrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad (\text{axe } \lambda\mu\nu)$$

le système des trois triangles homologiques selon l'axe $\lambda\mu\nu$, chacun des centres λ_1, μ_1, ν_1 étant celui des deux triangles non écrits sur l'horizontale où il se trouve, et ces trois centres étant d'ailleurs en ligne droite. Désignons les points *associés* par les lettres grecques correspondantes.

On a les nouveaux systèmes

$$\begin{array}{c|ccc|}K & A_1 & B_1 & C_1 \\ H_1 & A_2 & B_2 & C_2 \\ \lambda_1 & \alpha & \beta & \gamma\end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc|}K_1 & A & B & C \\ I & A_2 & B_2 & C_2 \\ \mu_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc|}H & A & B & C \\ I_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ (\text{axe } \lambda\mu\nu).$$

et, par suite

$$\begin{array}{c|ccc|}\lambda'_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \mu'_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu'_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ \lambda\mu\nu.$$

Or le système (1) donne naissance au système inverse

$$\begin{array}{c|ccc|}\lambda & A & A_1 & A_2 \\ \mu & B & B_1 & B_2 \\ \nu & C & C_1 & C_2\end{array}\ \lambda_1\mu_1\nu_1$$

et, par conséquent, aux suivants

$$\begin{array}{c|ccc|}\cdot & B & B_1 & B_2 \\ \cdot & C & C_1 & C_2 \\ \lambda & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2\end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc|}\cdot & A & A_1 & A_2 \\ \cdot & C & C_1 & C_2 \\ \mu & \beta & \beta_1 & \beta_2\end{array}\,, \qquad \begin{array}{c|ccc|}\cdot & A & A_1 & A_2 \\ \cdot & B & B_1 & B_2 \\ \nu & \gamma & \gamma_1 & \gamma_2\end{array}\ (\text{axe } \lambda_1\mu_1\nu_1),$$

en éliminant les centres inutiles.

Il résulte de là que les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ passent par le point de rencontre λ_1 des droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ou λ'_1 se confond avec λ_1. De même, μ'_1 se confond avec μ_1 et ν'_1 avec ν_1; en d'autres termes, le système (1) entraîne le suivant

$$(2)\qquad \begin{array}{c|ccc|}\lambda_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ \mu_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ \lambda\mu\nu,$$

et on a les triangles homologiques

$$\omega \begin{array}{|ccc|}A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma\end{array}\,, \qquad \omega_1 \begin{array}{|ccc|}A_1 & B_1 & C_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\end{array}\,, \qquad \omega_2 \begin{array}{|ccc|}A_2 & B_2 & C_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{array}\ (\text{axe } \lambda\mu\nu).$$

Il reste à prouver que les trois centres ω, ω_1, ω_2 coïncident. En effet, le système

$$(3)\qquad \begin{array}{c|ccc|l} H_1 & A & B & C & \\ \omega & A_1 & B_1 & C_1 & (\text{axe } \lambda\mu\nu), \\ \nu_1 & \alpha & \beta & \gamma & \end{array}$$

traité comme le système (1), entraîne le suivant

$$\begin{array}{c|ccc|l} H_1 & A_2 & B_2 & C_2 & \\ \omega_2 & P & Q & R & \lambda\mu\nu, \\ \nu_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}$$

P, Q, R étant les associés de A_1, B_1, C_1 dans (3). Donc ω_2 coïncide avec ω. On prouverait de même que ω_1 se confond avec ω.

Remarque. — En combinant trois à trois les colonnes du tableau

$$\left\{\begin{array}{cccccc} B & B_1 & B_2 & \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ C & C_1 & C_2 & \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}\right.$$

on obtient vingt systèmes de deux triangles homologiques (centre λ) et dont les axes sont les droites

$$(4)\quad \lambda_1\mu_1\nu_1,\ \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & H_1 & K \\ \mu_1 & I & K_1 \\ \nu_1 & I_1 & H \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & I & I_1 \\ \mu_1 & H & H_1 \\ \nu_1 & K & K_1 \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 & H & K_1 & \omega \\ \mu_1 & I_1 & K & \omega \\ \nu_1 & I & H_1 & \omega \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que $\lambda_1 H K_1$, $\mu_1 I_1 K$, $\nu_1 I H_1$ sont trois nouvelles droites passant par ω.

Il résulte des droites (4) que dans l'hexagone

$$I\quad I_1\quad H\quad H_1\quad K\quad K_1$$

les côtés opposés se coupent aux points λ_1, μ_1, ν_1 en ligne droite, et les diagonales *principales* HK_1, I_1K, IH_1 sont concourantes en ω. Cet hexagone est donc à la fois de Pascal et de Brianchon.

Question 1653.

C étant le cercle osculateur en un point M d'une parabole, démontrer géométriquement que le foyer divise dans le rapport de 1 à 3 la droite MD, D étant le symétrique par rapport à la normale en M du point où le cercle C rencontre le diamètre de la parabole relatif au point M.

(E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. P. Michel.

Soit O le centre du cercle osculateur; je le projette en A sur la droite MD; on sait que le foyer F est le milieu de la longueur MA. (Question 1561, solution par H. Brocard, *Nouvelles Annales*, septembre 1892.)

Or

$$MD = 2MA;$$

par suite

$$MF = \frac{1}{3}FD.$$

C'est ce que l'on demandait de démontrer.

Question 1649.

On donne une ellipse; on prend le triangle ACB formé par les deux tangentes CA, CB à cette courbe et par la corde de contact AB. Sur les côtés de ce triangle comme diamètres, on décrit des sphères; elles se coupent en deux points, réels ou imaginaires :

1° *Quel est le lieu (M) de ces points lorsqu'on déplace AB parallèlement à la même direction;*

2° *Quel est le lieu des lignes (M) lorsqu'on fait varier la direction de AB.*

(Mannheim.)

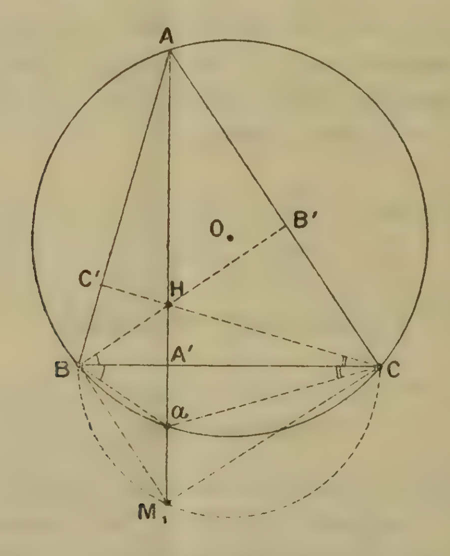
SOLUTION.

Par M. X***.

Le lieu des points d'où sont vus sous un angle droit les trois côtés du triangle formé par deux points quelconques d'une el-

lipse donnée et par le pôle de la corde qui les joint est un cas particulier de la surface de l'onde lumineuse.

En général les deux points M, M', d'où les trois côtés d'un triangle ABC sont vus chacun sous un angle droit, s'obtiendront de la manière suivante : considérant la sphère circonscrite au triangle ABC et ayant son centre O dans le plan de ce triangle, on la coupera par une perpendiculaire au plan du même triangle menée par le point de concours H de ses hauteurs : on aura ainsi deux points N et N'; ces points ne sont pas encore ceux qui sont demandés; mais, pour les obtenir, il suffira de réduire dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ les distances HN et HN'. Ou bien encore



on considérera l'ellipsoïde de révolution aplati, ayant pour équateur le cercle circonscrit au triangle ABC et pour petit axe $\frac{R}{\sqrt{2}}$, et on le coupera par la perpendiculaire au plan du triangle passant par le point de concours H de ses hauteurs.

En effet, soit décrit un demi-cercle sur le côté BC du triangle, et soit la hauteur $\overline{AHA'\alpha}$ prolongée jusqu'en M_1 où elle coupe ce demi-cercle, le triangle BM_1C est rectangle en M_1, et si on le fait tourner autour de son hypoténuse jusqu'à ce que le sommet M_1 vienne en M sur la perpendiculaire élevée en H, je dis que le point M est l'un des points cherchés. Pour

le montrer, il suffit de considérer l'expression du carré de la distance $\overline{HM}$,

$$\overline{HM}^2 = \overline{A'M_1}^2 - \overline{HA'}^2.$$

Or, en premier lieu,

$$\overline{A'M_1}^2 = \overline{BA'}.\overline{A'C},$$

et l'on a

$$\overline{BA'} = c \cos B = 2R \cos B \sin C,$$
$$\overline{A'C} = b \cos C = 2R \sin B \cos C;$$

par suite,

$$\overline{A'M_1}^2 = 4R^2 \sin B \cos B \sin C \cos C.$$

On a, d'autre part, $\overline{HA'} = \overline{A'\alpha}$, et

$$\overline{AA'}.\overline{A'\alpha} = \overline{BA'}.\overline{A'C};$$

d'ailleurs la hauteur $\overline{AA'}$ est égale à $2R \sin B \sin C$: il vient donc

$$\overline{A'H} = \overline{A'\alpha} = 2R \cos B \cos C$$

et, conséquemment,

$$\begin{aligned}\overline{HM}^2 &= 4R^2 \cos B \cos C (\sin B \sin C - \cos B \cos C)\\ &= 4R^2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

La symétrie de cette expression établit l'exactitude de la proposition avancée et le point M, d'où, par construction, le côté $\overline{BC}$ du triangle est vu sous un angle droit, est bien tel que les deux autres côtés en sont vus également sous des angles droits.

La *puissance* du point H par rapport à la sphère considérée est mesurée par $\overline{HN}^2 = \overline{AH}.\overline{H\alpha}$, ou encore $2.\overline{A'\alpha}\left(\overline{AA'} - \overline{A'\alpha}\right)$, c'est-à-dire, en vertu des expressions déjà employées,

$$8R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Il en résulte que l'on a bien

$$\overline{HN} = \overline{HM}.\sqrt{2}.$$

Ces préliminaires étant établis, voici une solution analytique de la question posée.

Soient α, β les coordonnées d'un point A, sa polaire BC a pour équation

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0,$$

celle de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

de sorte qu'il viendra, pour le couple de tangentes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$,

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) \\ - (b^2\alpha x + a^2\beta y^2) - a^2b^2 = 0,$$

et, pour les droites parallèles issues de l'origine,

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + a^2y^2) - (b^2\alpha x + a^2\beta y)^2 = 0,$$

ou encore, en ordonnant et supprimant a^2b^2, facteur commun,

$$(b^2 - \beta^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (a^2 - \alpha^2)y^2 = 0.$$

Considérant maintenant un point H, de coordonnées ξ, η, j'aurai l'équation du couple de droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, en transportant d'abord l'origine en H, ce qui donne pour les équations de l'ellipse et de la droite $\overline{BC}$,

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2\xi x + 2a^2\eta y + b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0$$

et

$$b^2\alpha x + a^2\beta y + b^2\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2 = 0;$$

puis en éliminant, entre ces équations, préalablement rendues homogènes par le changement de x et y en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, la variable d'homogénéité z, il viendra ainsi

$$(b^2x^2 + a^2y^2)(b^2\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2)^2 \\ - 2(b\alpha\xi + a^2\beta\eta - a^2b^2)(b^2\xi x + a^2\eta y)(b^2\alpha x + a^2\beta y) \\ + (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2)(b^2\alpha x + a^2\beta y)^2 = 0.$$

et, après développement,

$$\begin{aligned}&[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\eta^2-2a^2b^2\beta\eta+b^4(a^2-\alpha^2)]x^2\\&\quad-2[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi\eta-a^2b^2(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)]xy\\&\quad+[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi^2-2a^2b^2\alpha\xi+a^4(b^2-\beta^2)]y^2=0.\end{aligned}$$

Il faudrait, pour rapporter les droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ aux axes de l'ellipse, changer dans cette équation x et y en $x-\xi$ et $y-\eta$; mais, comme il suffit de considérer des droites parallèles menées par O, on peut conserver l'équation telle quelle.

Pour qualifier maintenant le point H comme point de concours des hauteurs du triangle ABC, j'écris que des droites $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ l'une est perpendiculaire à l'une des droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, et l'autre à l'autre. Cette condition de perpendicularité double entre droites de deux couples supposés respectivement représentés par les équations

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$
$$a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$$

s'exprime en général par l'égalité de rapports

$$\frac{a'}{b}=\frac{-h'}{h}=\frac{b'}{a}.$$

On aura donc ici, introduisant un facteur de proportionnalité ρ,

$$\begin{cases}(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi^2-2a^2b^2\alpha\xi+a^4(b^2-\beta^2)=\rho(b^2-\beta^2),\\(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\xi\eta-a^2b^2(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)=\rho\alpha\beta,\\(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)\eta^2-2a^2b^2\beta\eta+b^4(a^2-\alpha^2)=\rho(a^2-\alpha^2),\end{cases}$$

équations d'où ξ, η et l'inconnue auxiliaire ρ peuvent être dégagées.

Ce groupe d'équations présente toutefois une ambiguïté que la question ne comporte pas : il est clair, en effet, par la façon même dont ces équations ont été obtenues, que leurs solutions ξ, η conviennent aussi bien au point de concours des normales à l'ellipse en B et C qu'au point de concours des hauteurs du triangle ABC. Mais, pour séparer la solution étrangère, il n'y a qu'à faire entrer en ligne de compte l'équation de la hauteur $\overline{AH}$

$$a^2\beta(\xi-\alpha)=b^2\alpha(\eta-\beta).$$

laquelle n'est vérifiée que par les coordonnées du point cherché.

La deuxième équation du groupe, par exemple, en éliminant η par le moyen de l'équation auxiliaire, deviendra

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)a^2\beta\xi^2 - [(a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) + a^2b^2(a^2 + b^2)]\alpha\beta\xi + b^2\alpha^2\beta(a^4 - \rho) = 0,$$

et elle doit avoir une solution commune avec la première équation du groupe. Si donc on en retranche celle-ci, multipliée par $a^2\beta$, la solution commune sera donnée par l'équation résultante, qui, après suppression d'un facteur commun $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$, se réduit simplement à

$$(a^2 - b^2)\alpha\xi = a^4 - \rho.$$

Reprenant à nouveau la première équation du groupe et y substituant cette expression de $(a^4 - \rho)$ en ξ, il vient définitivement

$$\xi = \alpha\frac{(a^2 - b^2)\beta^2 + b^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2};$$

et l'on en conclura

$$\eta = \beta\frac{-(a^2 - b^2)\alpha^2 + a^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} \quad (^1).$$

Telles sont les formules qui font connaître rationnellement les coordonnées ξ et η du point H en fonction des coordonnées α, β du point A.

---

(1) Ces valeurs, comparées respectivement à la première et à la troisième équation du groupe primitif, font immédiatement connaître les expressions des coordonnées du point de concours des normales aux extrémités de la corde $\overline{\text{BC}}$ en fonction de celles du pôle de cette corde, c'est-à-dire

$$\xi' = \alpha\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - \beta^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad \eta' = -\beta\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - \alpha^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Ou bien, au contraire, on peut obtenir directement ces coordonnées comme celles du point diamétralement opposé à A sur le cercle (ABC), dont l'équation est calculée plus loin, et alors les équations écrites en premier lieu, débarrassées de cette solution, font connaître ξ et η.

Réciproquement, ξ et η étant donnés, on peut en déduire α et β, mais non point rationnellement. Toutefois les équations exprimant α et β en ξ et η ne sont point d'un degré aussi élevé qu'elles peuvent le paraître de prime abord. En effet, multipliant par α et β respectivement les expressions de ξ et η, et faisant la somme, il viendra simplement

$$\alpha\xi + \beta\eta = a^2 + b^2,$$

équation linéaire en α et β comme en ξ et η et qu'il suffit d'adjoindre à l'équation déjà mentionnée

$$a^2\beta(\xi - \alpha) = b^2\alpha(\eta - \beta),$$

laquelle est linéaire en ξ et η seulement, quadratique en α, β.

Puisque à un point H pris arbitrairement dans le plan de l'ellipse correspondent deux triangles ABC et que chaque triangle donne lieu à deux points M et M′, d'où les côtés sont vus sous un angle droit, il est clair que la surface cherchée est du quatrième ordre, symétrique par rapport au plan de l'ellipse donnée comme par rapport aux plans perpendiculaires menés suivant ses axes, et enfin qu'elle admet comme ligne d'intersection avec le plan de l'ellipse : 1° cette courbe elle-même; 2° le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse, ou cercle orthoptique.

Quoi qu'il en soit, du reste, et pour achever la solution analytique, je forme l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Cette équation rentre dans la forme

$$\begin{aligned}&(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\\ &\quad + (b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)(\lambda x + \mu y + \nu) = 0,\end{aligned}$$

qui est celle des coniques admettant la corde $\overline{BC}$ en commun avec l'ellipse donnée. Des trois conditions à introduire encore, la première est qu'elle soit vérifiée par les coordonnées α, β du point A, ce qui donne

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu = -1.$$

En écrivant de plus que les termes du second degré sont $x^2 + y^2$ à un facteur constant près, il vient encore

$$\lambda a^2\beta + \mu b^2\alpha = 0$$

et

$$\lambda b^2\alpha - \mu a^2\beta = a^2 - b^2.$$

d'où

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2)\,b^2\alpha}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2},$$

$$\mu = -\frac{(a^2 - b^2)\,a^2\beta}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2},$$

$$\nu = -\frac{a^2 b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2},$$

et pour l'équation cherchée

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2)b^2\alpha x$$
$$- (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2)\,a^2\beta y + (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0.$$

Il suffit d'y changer $x^2 + y^2$ en $x^2 + y^2 + 2z^2$ pour obtenir l'équation de l'ellipsoïde de révolution aplati ayant pour équateur le cercle (ABC),

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2)b^2\alpha x$$
$$- (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2)a^2\beta y + (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0,$$

et, finalement, l'élimination de α et β entre cette équation et celles qui lient entre elles les coordonnées de A et de H fournira celle de la surface cherchée.

Pour effectuer cette élimination de α et β, je commence par substituer, au contraire, dans l'équation de l'ellipsoïde les expressions de x et de y en α et β, savoir

$$x = \alpha\,\frac{(a^2 - b^2)\beta^2 + b^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2},$$

$$y = \beta\,\frac{-(a^2 - b^2)\alpha^2 + a^2(a^2 + b^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2},$$

mais d'abord seulement dans les termes des degrés zéro et un : il me vient ainsi

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2(x^2 + y^2 + 2z^2)$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)[-(a^2 - b^2)\alpha^2\beta^2 + (a^2 + b^2)(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)]$$
$$+ [2a^2b^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2)](b^2\alpha^2 + a^2\beta^2).$$

Je trouve, d'autre part,

$$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a^2 - 2b^2)\alpha^2\beta^2$$
$$+ (a^2 + b^2)^2(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2).$$

et, par suite, en faisant la différence j'aurai l'expression de z^2, assez compliquée à première vue, mais qui se simplifie aisément si l'on réfléchit qu'elle admet nécessairement le facteur $\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2$. L'autre facteur peut lui-même s'écrire également *a priori*, comme représentant le lieu des pôles des normales à l'ellipse; quoi qu'il en soit, on trouvera

$$z^2 = -\frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2)[(a^2-b^2)^2\alpha^2\beta^2-b^6\alpha^2-a^6\beta^2]}{(b^2\alpha^2-a^2\beta^2)^2}.$$

Ainsi les équations de la surface sont ramenées à la forme

$$x=f(\alpha,\beta),\qquad y=f_1(\alpha,\beta),\qquad z=f_2(\alpha,\beta).$$

Mais, pour avoir une seule équation du type $F(x, y, z)=0$, je fais maintenant la somme des expressions dont la différence a donné z^2. J'obtiens, après quelques réductions,

$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2)=b^4\alpha^2+a^4\beta^2+a^2b^2(a^2+b^2),$$

et si maintenant je retranche successivement des deux membres les quantités $a^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$ et $b^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)$, il me viendra

$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2-a^2)=b^2[-(a^2-b^2)\alpha^2+a^2(a^2+b^2)],$$
$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2+z^2-b^2)=a^2[(a^2-b^2)\beta^2+b^2(a^2+b^2)],$$

c'est-à-dire, en se reportant aux expressions mêmes de x et y en α et β,

$$\alpha=\frac{a^2x}{x^2+y^2+z^2-b^2},\qquad \beta=\frac{b^2y}{x^2+y^2+z^2-a^2}.$$

Or $\alpha x+\beta y=a^2+b^2$; j'ai donc simplement

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}-(a^2+b^2)=0.$$

C'est, pour un cas particulier, l'équation de la surface de l'onde lumineuse, qu'on pourra aisément ramener à sa forme la plus usuelle

$$\frac{a'^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a'^2}+\frac{b'^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b'^2}+\frac{c'^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c'^2}=0,$$

en prenant $a'^2=a^2+b^2$, $b'^2=a^2$, $c'^2=b^2$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1647. Démontrer que la somme des carrés des coefficients binômiels d'un nombre entier positif a

$$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2$$

n'est *jamais* divisible par un nombre premier : $p > 2a$, mais toujours divisible par *tous* les nombres premiers compris entre

$$\frac{2a}{2n+2} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+1},$$

où n est un nombre entier positif et $< a$; et que la même somme n'est pas divisible par un même nombre premier p compris entre

$$\frac{2a}{2n+3} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+2},$$

excepté, si une puissance de p (supérieure à l'unité) se trouve dans l'intervalle de a jusqu'à $2a$. (C. Szily.)

1648. Démontrer les identités suivantes

1. $$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=0}^{k=m} 2^{a-2k} \binom{a}{k} \binom{a-k}{k}$$

où

$$m = \varepsilon\left(\frac{a}{2}\right).$$

2. $$\left\{\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 &= 2 \sum_{k=0}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a-1}{k} \\ &= \frac{2(2a-1)}{a-1} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a-1}{k} \binom{a-1}{k-1}. \end{aligned}\right.$$

3. $$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2 = \frac{a+1}{a}\sum_{k=1}^{k=a-1}\binom{a}{k}\binom{a}{k-1}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2 = (-1)^a \sum_{k=0}^{k=2a}(-1)^k\binom{2a}{k}^2.$$

5. $$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2\sum_{k=0}^{k=b}\binom{b}{k}^2}{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b}\binom{a}{k}\binom{b}{k}} = \sum_{k=-b}^{k=b}(-1)^k\binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k},$$

où b est un nombre entier positif $< a$. (C. Szily.)

1657. On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents.

Déterminer :

1° L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues ;

2° Le nombre des points de contact de cette surface et de l'une de ces ellipses. (Mannheim.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1569 [1].

COMPLÉMENT A LA SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Note. — La construction des points M est précisément celle qui détermine pour lieu géométrique de ces points la courbe (1) désignée sous le nom de *Kreuzcurve*.

Il est intéressant de remarquer, à ce sujet, que cette courbe paraît avoir été signalée pour la première fois par Terquem (voir *N. A. M.*, 1847, p. 394, quest. 165).

[1] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XI, p. 43* ; 1892.

Question 954.

(*Voir* 2e série, t. VIII, p. 432.)

Étant données une parabole et une circonférence passant par le foyer et coupant la parabole en quatre points, trouver le lieu des milieux des tangentes communes.

(Olga Ermanska.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

L'énoncé textuellement reproduit renferme une indétermination. Il est évident que, pour le compléter, il est nécessaire de spécifier une condition relative aux circonférences, et puisqu'elle est laissée au choix du solutionniste, il y a lieu de prendre la plus simple.

Nous supposerons donc, par exemple, les circonférences de rayon constant R.

L'équation de la parabole rapportée à son axe et à son foyer étant

$$(1) \qquad y^2 = 2px + p^2,$$

celle de la circonférence sera

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

avec la condition

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

La tangente à la circonférence, parallèle à la direction m, a pour équation

$$y = mx + \beta - m\alpha - R\sqrt{1 + m^2}.$$

Elle est tangente à la parabole (1) sous la condition

$$(4) \qquad [p(1 + m^2) - 2m\beta + 2m^2\alpha]^2 = 4m^2R^2(1 + m^2).$$

Formant les expressions des coordonnées des points de contact avec les deux courbes, on aura, pour tout point du

lieu

$$(5) \qquad 2x = \alpha - \frac{\mathrm{R}m}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{p}{2m^2} - \frac{p}{2},$$

$$(6) \qquad 2y = \beta + \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{p}{m}.$$

Il restera donc à éliminer m, α, β entre les quatre équations (3), (4), (5), (6), ou, ce qui revient au même, tirer α et β des équations (5), (6), les substituer dans les équations (3), (4) et éliminer m entre deux nouvelles équations.

La nécessité de se débarrasser au préalable des irrationnelles rendra cette élimination fort laborieuse. Nous croyons même qu'il serait impossible, en raison de cette complication, de parvenir à l'équation du lieu sous forme explicite.

Comme autre condition simple relative aux circonférences (2), il y aurait à supposer leurs centres sur l'axe de la parabole.

Les équations précédentes pourront encore nous servir moyennant les substitutions $\beta = 0$, $\mathrm{R} = \alpha$; mais les simplifications qui en résultent sont illusoires, et l'élimination finale est tout aussi impraticable.

Nous croyons donc devoir nous borner à ces indications; cependant on peut observer qu'il paraît facile d'obtenir, par un tracé direct, quelques données sur la forme de la courbe, notamment dans la seconde hypothèse. Elle admet alors deux branches infinies, symétriques par rapport à $\mathrm{O}x$, asymptotes à $\mathrm{O}y$, extérieures et tangentes à la parabole, et paraboliques du côté des x positifs.

N. B. — M. Barisien a résolu la question en supposant que le cercle au lieu de passer par le foyer a son centre fixe.

Question 1419.

Un triangle ABC *étant donné, on mène d'un point* P *aux côtés* BC, CA, AB *des parallèles qui rencontrent respectivement* AB, BC, CA *en* A′, B′, C′ :

1° *Pour que les trois points* A′, B′, C′ *soient en ligne droite, il faut que* P *se trouve sur une conique déterminée.*

2° *A un point* P *de cette conique correspondent deux*

droites A′B′C′ : *quel est le lieu de leur point de rencontre quand le point* P *parcourt la conique?*

Cas particulier du triangle ABC *équilatéral.*

(POUJADE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

1° Prenons le côté CA pour axe des x, le côté CB pour axe des y. Soit θ l'angle ABC et posons $CA = a$, $CB = b$. Si α et β sont les coordonnées du point P, les équations des droites AB, PA′, PB′, PC′ sont respectivement

$$\begin{aligned} bx + ay &= ab, \\ x - \alpha &= 0, \\ y - \beta &= 0, \\ b(x-\alpha) + a(y-\beta) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées des points A′, B′, C′ sont

$$A' \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= \frac{b(a-\alpha)}{a}; \end{aligned} \right. \qquad B' \left\{ \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \beta; \end{aligned} \right. \qquad C' \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a\beta + b\alpha}{b}, \\ y &= 0. \end{aligned} \right.$$

La condition pour que ces trois points A′, B′, C′ soient en ligne droite est exprimée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{b(a-\alpha)}{a} & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ \dfrac{a\beta + b\alpha}{b} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

lequel développé devient

$$(a\beta + b\alpha)(a\beta + b\alpha - ab) - ab\alpha\beta = 0$$

ou

$$(1) \qquad a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + ab\alpha\beta - ab(a\beta + b\alpha) = 0.$$

Le lieu de P est donc alors la conique circonscrite à ABC et dont le centre coïncide avec le centre de gravité du triangle. Les tangentes à la conique aux sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés.

2° Les parallèles menées de P aux côtés BC, CA, AB, rencontrent aussi les côtés CA, AB, BC respectivement en A″, B″, C″. En exprimant que les points A″, B″, C″ sont en ligne droite, on retrouve l'équation (1). Il en résulte qu'à chaque point P correspondent deux droites A′B′C′ et A″B″C″.

L'équation de la droite A′B′C′ est

$$\frac{X}{CC'} - \frac{Y}{CB'} = 1.$$

Or

$$CC' = \frac{a\beta + b\alpha}{b}, \qquad CB' = \beta.$$

Donc l'équation de A′B′C′ est

$$(2) \qquad b\beta X + (Y - \beta)(a\beta + b\alpha) = 0.$$

Celle de A″B″C″ est de même

$$(3) \qquad a\alpha Y + (X - \alpha)(a\beta + b\alpha) = 0.$$

Pour avoir le lieu du point de rencontre des droites A′B′C′ et A″B″C″, il faut éliminer α et β entre (1), (2) et (3).

En résolvant (2) et (3) par rapport à X et à Y, on trouve

$$X = \frac{b\alpha^2(a\beta + b\alpha)}{(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta}, \qquad Y = \frac{a\beta^2(a\beta + b\alpha)}{(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta}.$$

Mais (1) peut s'écrire

$$(a\beta + b\alpha)^2 - ab\alpha\beta = ab(a\beta + b\alpha);$$

de sorte que X et Y se réduisent à

$$X = \frac{\alpha^2}{a}, \qquad Y = \frac{\beta^2}{b}.$$

Par conséquent

$$\alpha = \sqrt{aX}, \qquad \beta = \sqrt{bY}.$$

En portant ces valeurs de α et β dans (1), nous avons, après avoir fait disparaître les radicaux,

$$(4) \qquad \begin{cases} [(aY + bX)(aY + bX - ab) + abXY]^2 \\ \quad = 4abXY(aY + bX - ab)^2. \end{cases}$$

Le lieu des points de rencontre de A′B′C′ et A″B″C″ est donc une quartique passant par les points A, B, C, qui sont

des points de rebroussement : la tangente de rebroussement, en chacun de ces points, est la médiane du triangle y aboutissant.

Cas du triangle équilatéral. — Alors $a = b$, $\theta = 60°$. Le lieu du point P devient alors

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = a(\alpha + \beta). \tag{5}$$

C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Le lieu du point de rencontre des droites A'B'C' et A''B''C'' devient

$$[(X + Y)^2 + XY - a(X + Y)]^2 = 4XY(X + Y - a)^2. \tag{6}$$

C'est l'hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{a}{3\sqrt{3}}$ roulant à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Questions 1411-1431.

Démontrer que l'expression

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \ldots\right]$$

tend vers $\frac{1}{p-1}$, *lorsque* n *augmente indéfiniment.*

(Cesaro.)

SOLUTION

Par M. François Borletti, de Milan.

Si x et y désignent les coordonnées rectangulaires et si l'on pose

$$y = \frac{1}{x^p}, \tag{1}$$

l'aire comprise entre la courbe (1), l'axe positif x et les ordonnées, qui répondent aux abscisses $x = n + 1$ et $x = \infty$, sera

$$\int_{n+1}^{\infty} y\,dx = \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.$$

Si p est un nombre positif, l'ordonnée y de la courbe (1)

prend des valeurs toujours plus petites, lorsque l'abscisse x augmente; par conséquent, la somme des rectangles ayant pour base commune l'unité et pour hauteur la dernière ordonnée de chaque rectangle que nous considérons sera

$$\frac{1}{(n+2)^p} + \frac{1}{(n+3)^p} + \ldots < \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}};$$

en ajoutant $\frac{1}{(n+1)^p}$ aux deux membres, on aura

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \frac{1}{(n+3)^p} + \ldots$$
$$< \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.$$

On obtiendra encore que la somme des rectangles, ayant pour hauteur la première ordonnée, sera

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \ldots > \frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{(n+1)^{p-1}} < (p-1)\left[\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \ldots\right]$$
$$> \frac{1}{(n+1)^{p-1}} + \frac{p-1}{(n+1)^p}.$$

Donc, si nous multiplions par n^{p-1}, nous obtiendrons

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1} < (p-1)\mathrm{S} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\frac{p-1}{n+1},$$

en désignant par S la suite donnée.

Si dans cette expression on fait $n = \infty$, on aura

$$\mathrm{S} = \frac{1}{p-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Question 1517.

On donne une parabole et une autre conique, et l'on mène les quatre tangentes communes qui touchent la conique en A, A′, A″, A‴. *Par le foyer* F *de la parabole, on mène un cercle touchant la conique en* A *et la rencontrant en* B *et* C, *etc. Démontrer que les quatre droites* BC, B′C′, ... *concourent en un même point.* (Weill.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

La question est beaucoup plus générale que ne l'indique l'énoncé.

Nous allons démontrer que :

Étant données une parabole et une conique, une tangente quelconque rencontre la conique aux points A *et* A_1. *Par ces deux points et par le foyer* F *de la parabole on fait passer un cercle. La seconde sécante d'intersection de ce cercle et de la conique passe par un point fixe.*

Soient

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

l'équation de la parabole et

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2}$$

celle de la conique.

Une tangente à la parabole de coefficient angulaire m a pour équation

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{3}$$

L'équation générale d'une conique passant par le point d'intersection de la tangente (3) avec la conique (2) est

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F) \\ &\qquad + (ux + vy - 1)\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

dans laquelle le facteur $(ux + vy - 1)$ représente le premier membre de l'équation de la seconde sécante d'intersection.

Exprimons que la conique (4) est un cercle, nous avons les deux conditions

$$(5) \qquad mv - u = 2B\lambda,$$

$$(6) \qquad v + mu = \lambda(A - C).$$

Exprimons aussi que la conique (4) passe par le foyer F, il vient

$$(7) \qquad \lambda(Ap^2 + 4Dp + 4F)m - p(up - 2)(m^2 + 1) = 0.$$

Les équations (5), (6) et (7) sont du premier degré en u, v et λ. On en déduit

$$(8) \qquad \lambda = -\frac{2p(m^2+1)}{Cp^2m + 2Bp^2 + 4Dpm + 4Fm},$$

$$(9) \qquad u = \frac{-2p[m(A-C) - 2B]}{m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2},$$

$$(10) \qquad v = \frac{-2p(2Bm + A - C)}{m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2}.$$

Par suite, l'équation de la seconde sécante d'intersection

$$ux + vy - 1 = 0$$

devient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &2px[m(A-C) - 2B] + 2py[2Bm + A - C] \\ &\qquad + m(Cp^2 + 4Dp + 4F) + 2Bp^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, cette équation ne contenant que m au premier degré, il en résulte que la seconde sécante d'intersection passe par le point donné par les équations des deux droites rectangulaires

$$(12) \qquad (A - C)x + 2By + \frac{Cp^2 + 4Dp + 4F}{2p} = 0,$$

$$(13) \qquad 2Bx - y(A - C) - Bp = 0.$$

C'est aussi par ce point fixe que passent les sécantes BC, B'C', ... de l'énoncé, lesquelles correspondent aux tangentes de la parabole qui sont en même temps tangentes à la conique donnée.

Remarque. — Lorsque la parabole donnée varie en conservant le même axe et le même sommet, on trouve pour le lieu

du point fixe une conique : ce dont il est facile de s'assurer, en éliminant p entre les équations (12) et (13).

Question 1525.

On donne les deux demi-diamètres conjugués OA, OB *d'une ellipse. Du point* B *on abaisse une perpendiculaire sur* OA *et l'on porte sur cette droite les segments* BC *et* BD *égaux à* OA. *La circonférence* COD *rencontre aux points* P, Q *la parallèle menée du point* B *à* OA.

On sait que OP, OQ *donnent les directions des axes de l'ellipse; on demande de démontrer que les projections de* OP *et de* OQ *sur* OC (*ou sur* OD) *sont égales aux demi-axes de l'ellipse.* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Soit φ l'angle d'anomalie excentrique au point B, l'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes. Supposons le point P sur le grand axe de l'ellipse, et le point Q sur le petit axe. On sait que

$$(1) \qquad \mathrm{OP} = \frac{a}{\cos\varphi}, \qquad \mathrm{OQ} = \frac{b}{\sin\varphi},$$

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

On sait aussi que le lieu des excentricités C et D se compose des deux cercles de rayons respectifs $(a - b)$ et $(a + b)$. Ainsi

$$\mathrm{OC} = a - b, \qquad \mathrm{OD} = a + b.$$

Je dis maintenant que les droites OC et OD sont également inclinées sur le grand axe de l'angle excentrique φ.

En effet, si α désigne l'angle de la normale en B avec OP, on a

$$\tan\alpha = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}.$$

D'où

$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} = \frac{b\cos\varphi}{\mathrm{OA}}.$$

Projetons le triangle DOB sur OP, il vient

$$\mathrm{OD}\cos\widehat{\mathrm{DOP}} = a\cos\varphi + \mathrm{BD}\cos\alpha = a\cos\varphi + \mathrm{OA}\cos\alpha.$$

Donc, d'après (2),

$$(a+b)\cos\widehat{\mathrm{DOP}} = a\cos\varphi + b\cos\varphi.$$

On a bien, par conséquent,

$$\widehat{\mathrm{DOP}} = \varphi.$$

On trouverait de même

$$\widehat{\mathrm{COP}} = \varphi.$$

Si nous projetons P et Q et P′ et Q′ sur OC, on a

$$\mathrm{OP}' = \mathrm{OP}\cos\varphi,$$
$$\mathrm{OQ}' = \mathrm{OQ}\sin\varphi.$$

Donc, d'après la relation (1),

$$\mathrm{OP}' = a,$$
$$\mathrm{OQ}' = b.$$

Si P et Q se projettent sur OD en P″ et Q″, on a évidemment

$$\mathrm{OP}'' = \mathrm{OP}' = a,$$
$$\mathrm{OQ}'' = \mathrm{OQ}' = a,$$

puisque la droite OP est bissectrice de l'angle COD.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

19001 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

